２０１９年１０月入学，２０２０年４月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理科学専攻（物理学系）

試験問題　＜一般入試＞

専　門　科　目

物　理　学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は４枚，下書き用紙は４枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０１９年１０月入学，２０２０年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第１問

半径 a の滑らかな輪に質量 m の小さなビーズを通す。輪を鉛直面内に置き，その中心を通る鉛直軸のまわり反時計方向に一定の角速度 ω で回転させる。ビーズの位置は，図 1 に示すように，鉛直下方からの角度 θ で表す。重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。

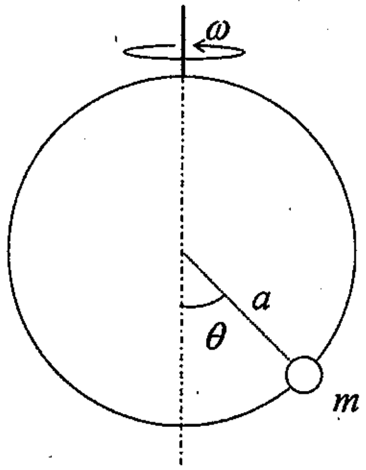

図 1

(1) ビーズの速さを θ と $\dot{\theta}$ を用いて表せ。ビーズの速度成分は，回転軸まわりの速さと輪の円周に沿う速さからなることに注意せよ。

(2) この系のラグランジアン $L(\theta,\dot{\theta})$ を求めよ。

(3) ラグランジュの運動方程式より次式を導け。

$$a\ddot{\theta} = -g\sin\theta(1-\gamma\cos\theta) \qquad \cdot\cdot\cdot\text{(i)}$$

ここで，パラメータ γ は $\gamma = a\omega^2/g$ で定義されている。

(4) ビーズに働く力がつりあっている位置 $\theta = \theta_0$ を平衡点という。平衡点は

$$\theta_0 = 0,\ \pi \qquad (\gamma < 1)$$

$$\theta_0 = 0,\ \pi,\ \cos^{-1}(1/\gamma) \quad (\gamma \geq 1)$$

となることを示せ。

以下では，(4)で求めた平衡点の安定性を調べよう。ここでは輪に対して静止している座標系を用いる。ビーズは輪に束縛されているので，θ方向の運動を考えればよい。いま，θが平衡点から微小量δだけずれたとする。ビーズの運動を求めるには，$\theta=\theta_0+\delta$を (i) 式に代入し$\theta=\theta_0$のまわりで Taylor 展開すればよい。近似としてδ の 1 次のオーダーまで考慮する。

$$\sin\theta = \sin\theta_0 + \delta\cos\theta_0$$

$$\cos\theta = \cos\theta_0 - \delta\sin\theta_0$$

に注意して，下記の問いに γ を用いて答えよ。

(5) ビーズの加速度$a\ddot{\delta}$ を求めよ。答えには θ_0 を用いること。また，ビーズが平衡点のまわりで振動するための条件を示せ。

(6) (5)の条件を満たす$\theta=\theta_0$を，安定な平衡点という。$\gamma<1$ および $\gamma>1$ のそれぞれの場合において，安定な平衡点を求めよ。計算過程も記せ。

(7) $\gamma<1$ と$\gamma>1$ の場合を比べると安定な平衡点は変わっている。この理由を述べよ。

２０１９年１０月入学，２０２０年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第２問

(1) 半径 a と半径 b の無限に長い二つの導体円筒を，中心軸を一致させて配置する(図 2(a))。内側の円筒には単位長さあたり λ の電荷を与える。また，外側の円筒は接地する。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，真空の誘電率を ε_0 とする。

(a) この同軸円筒の内外に生じる静電場の大きさ $E(r)$ を，軸からの距離 r の関数として求め，図示せよ。

(b) 静電ポテンシャル $\phi(r)$ を軸からの距離 r の関数として求め，図示せよ。

(c) 同軸円筒の単位長さあたりの静電容量を求めよ。

(d) (c)の結果を用いて，同軸円筒の単位長さあたりの静電エネルギーを求めよ。

(e) 軸方向単位長さあたりの空間に発生する静電場のエネルギーを $E(r)$ を利用して求め，(d)の結果と一致することを示せ。

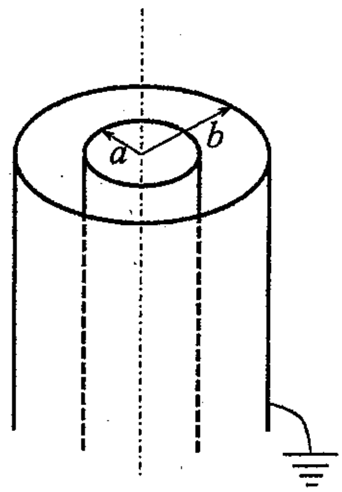

図2(a)

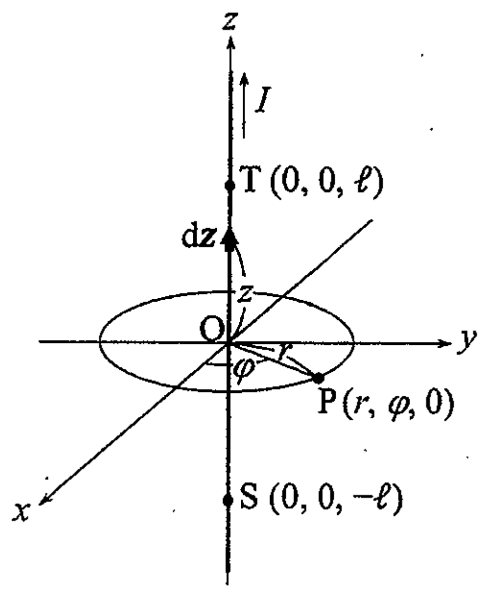

図2(b)

(2) 図 2(b) で示すような直線状の定常電流の周囲に生じる静磁場を，ベクトルポテンシャルを使って求めることを考える。ただし，電流 I は z 軸上を正の向きに流れるとし，座標系は円筒座標系 (r, φ, z) を用いる。真空の透磁率を μ_0 とする。

(a) このとき，$(0, 0, z)$ の位置にある電流素片 $I\mathrm{d}\boldsymbol{z}$ が，点 $\mathrm{P}(r, \varphi, 0)$ に作るベクトルポテンシャル $\mathrm{d}\boldsymbol{A} = (\mathrm{d}A_r, \mathrm{d}A_\varphi, \mathrm{d}A_z)$ を r と z の関数で記せ。

(b) z 軸上に点 $\mathrm{S}(0, 0, -\ell)$ と点 $\mathrm{T}(0, 0, \ell)$ をとるとき，ST 間を流れる電流が点 $\mathrm{P}(r, \varphi, 0)$ に作るベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A} = (A_r, A_\varphi, A_z)$ を r の関数で求めよ。ただし，次の不定積分を使って良い。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

(c) ST 間を流れる電流が，点 $\mathrm{P}(r, \varphi, 0)$ に作る磁束密度 $\boldsymbol{B} = (B_r, B_\varphi, B_z)$ を求めよ。また，$\ell \to \infty$ の極限を考えることにより，z 軸上に流れる全電流が作る磁束密度が $\boldsymbol{B} = (0, \mu_0 I/2\pi r, 0)$ となることを示せ。

なお必要であれば，円筒座標系で表されたスカラー場 $f(r, \varphi, z)$ の勾配，ベクトル場 $\boldsymbol{X}(r, \varphi, z)$ の発散，回転を利用せよ。

$$\mathrm{grad}f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{X} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rX_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial X_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{X} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial X_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial X_\varphi}{\partial z}, \frac{\partial X_r}{\partial z} - \frac{\partial X_z}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rX_\varphi\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial X_r}{\partial \varphi}\right)$$

２０１９年１０月入学，２０２０年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理科学専攻 （物理学系）
試験問題 ＜一般入試＞

【試験科目：専門科目 （物理学）】

第３問

一次元系においてシュレーディンガー方程式 $\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+V(x)\right\}\varphi(x)=E\varphi(x)$ により，エネルギー E をもった質量 m の粒子の状態を考える。$\hbar=\frac{h}{2\pi}$ であり，h はプランク定数である。ポテンシャルエネルギー $V(x)$ として，

$$V_1(x)=\begin{cases}\infty & (x<0)\\ 0 & (0<x<a)\\ \infty & (a<x)\end{cases},\quad V_2(x)=\begin{cases}\infty & (x<0)\\ 0 & (0<x<a)\\ V_0 & (a<x)\end{cases},\quad V_3(x)=-V_0\delta(x)$$

の３つの場合を考える時，以下の問いに答えよ。解答では 計算過程の式や考え方の説明も記述すること。なお，V_0 は正の定数であり，$\delta(x)$ はデルタ関数である。

(1) ポテンシャルエネルギーが $V(x)=V_1(x)$ の場合に，低い方から数えて n 番目のエネルギーをもつ束縛状態について，(a) 物質波としての波数 k_n と波長 λ_n，(b) 固有エネルギー E_n，(c) 規格化条件も考慮した波動関数 $\varphi_n(x)$ を求めよ。

(2) ポテンシャルエネルギーが $V(x)=V_2(x)$ の場合に，$0\leq E\leq V_0$ での束縛状態の波動関数を $0<x<a$ の領域で $\varphi(x)=A_2\sin kx+B_2\cos kx$，$a<x$ の領域で $\varphi(x)=C_2\mathrm{e}^{-\rho x}$ とおく。A_2, B_2, C_2 は定数である。

(a) シュレーディンガー方程式より k と ρ を計算し，$k^2a^2+\rho^2a^2$ を V_0 を含む形で表せ。

(b) $x=0$ および $x=a$ での接続条件から計算して $\rho a=-ka\cot ka$ の関係式を導出せよ。

(c) 束縛状態が存在しない時の V_0 の範囲を求めよ。また，束縛状態が n 個 $(n=1,2,\cdots)$ ある時の V_0 の範囲を求めよ。図３に示す $y=-x\cot x$ のふるまいを用いて良い。

(d) この $V(x)=V_2(x)$ の場合での束縛状態の様子について，古典力学で考える時と量子力学で考える時でどのような結果の違いがあるか。その違いを２つあげ，それらの様子について説明せよ。

(3) ポテンシャルエネルギーが $V(x) = V_3(x)$ の場合を考える。

(a) シュレーディンガー方程式を $x = 0$ を含む非常に狭い範囲 $[-\epsilon, \epsilon]$ $(\epsilon \to 0)$ で積分することにより $\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=+0} - \left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-0} = -\frac{2m}{\hbar^2}V_0\varphi(0)$ の関係を導出せよ。

(b) $E < 0$ での束縛状態の波動関数として $\varphi(x) = D_3 \mathrm{e}^{-\rho_3|x|}$ とおく。束縛状態の固有エネルギー E, および, 波動関数の ρ_3 と規格化定数 D_3 を求めよ。答は V_0 を含む形で表せ。

(c) エネルギー $E(> 0)$ の粒子が $x \to -\infty$ の側から x の正方向へ入射する場合を考える。定数 A_3, B_3, C_3 を用いて波動関数を $x < 0$ の領域で $\varphi(x) = A_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_3x} + B_3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_3x}$, $x > 0$ の領域で $\varphi(x) = C_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_3x}$ とおく。$x = 0$ での接続条件を考慮することにより, 反射率 R と透過率 T を求めよ。答は E と V_0 を含む形で表せ。

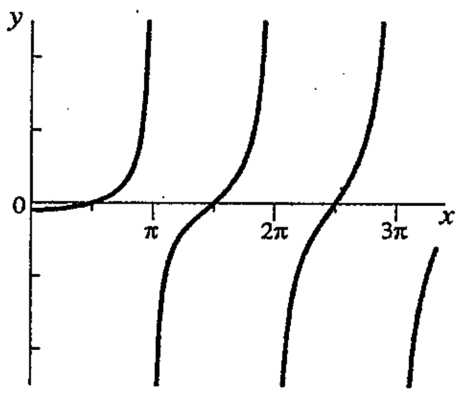

図3　$y = -x\cot x$ のグラフ

２０１９年１０月入学，２０２０年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第４問

スピン $\frac{1}{2}$ の粒子が一様な磁場 $\boldsymbol{H}=(0,\ 0,\ H)$ の中に置かれると，ゼーマン効果によって粒子のエネルギー準位は $E_\sigma=-\mu H\sigma$ となる。ただし，磁気モーメントを μ（正の定数），スピン変数を $\sigma=\pm1$ とする。また，ボルツマン定数を k_B とする。このとき，以下の問いに答えよ。

解答には，図4の双曲線関数（$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$）を参考にしてよい。

(1) 一つの粒子に対するカノニカル分布の状態和（分配関数）Z_1 を求めよ。
(2) 磁気モーメントが上向きである確率 p^+，下向きである確率 p^- を求めよ。
(3) 系の磁気モーメントの期待値を $\langle\mu_z\rangle$ とする。$\langle\mu_z\rangle$ を求め，$x=\frac{\mu H}{k_\mathrm{B}T}$ の関数として図示せよ。

次に, N 個の粒子による熱力学関数を求め，考察する。
(4) N 個の粒子に対するカノニカル分布の状態和（分配関数）Z_N を求めよ。
(5) ヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。
(6) エントロピー S を求めよ。さらに S の高温極限値（$T\to\infty$）を求め，熱力学第三法則を考慮した上で，S を温度 T の関数として図示せよ。
(7) (6)の結果を踏まえて，磁場 H を断熱的に H_2 から H_1 に変化させるとき（$H_2>H_1$), 温度 T はどのように変化するか考察せよ。
(8) 内部エネルギー U を求め, U を温度 T の関数として図示せよ。
(9) 比熱の温度依存性のおおよその振る舞いを図示せよ。また，比熱の温度依存性の特徴とその起源について考察せよ。

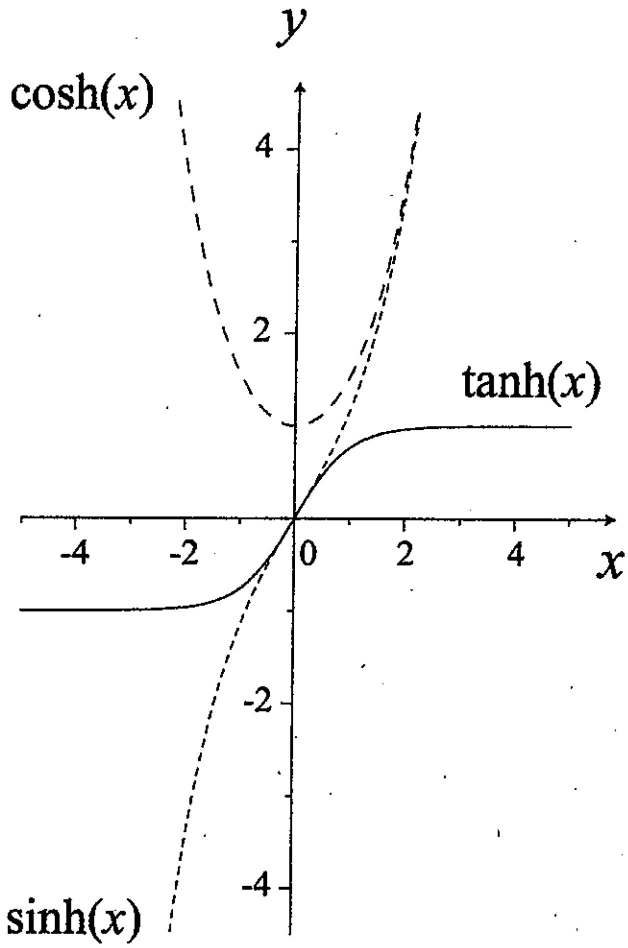

図4