

岡山大学大学院自然科学研究科
2020年度博士前期課程入学試験問題
機械システム工学専攻システム系

数学

注意事項

1. 解答始めの合図があるまで、中の頁を見てはいけない。
2. 問題用紙は4枚ある。
3. 解答用紙は、[1]、[2]、[3]、[4]の4枚および下書き用紙1枚の計5枚ある。
4. 解答始めの合図があったら、中の頁を見て枚数を確認すること。また、すべての解答用紙に、受験番号、氏名を記入すること。
5. 解答は、それぞれの問題の解答欄に記入すること。他の問題の解答を記入してはいけない。
6. 解答欄が足りないときは、同じ問題の解答用紙の裏に記入してもよいが、その場合、裏に記入していることを表の頁に書いておくこと。

令和元年8月22日

岡山大学大学院自然科学研究科
機械システム工学専攻システム系

数 学

[1] 問い(1)~(2)に答えよ。

- (1) $0 < x < 1$ とする。このとき、 $\frac{d}{dx} \ln(1+x) = \frac{1}{1+x}$ であることを利用して、 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ であることを説明せよ。

(2) つぎの定積分を求めよ。

① $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$

② $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$

数学

[2] 実対称行列 A に関する次の問いに答えよ。

- (1) A の固有値を α_i, α_j (任意の i, j について、 $i \neq j$ のとき $\alpha_i \neq \alpha_j$) とし、それぞれに対する固有ベクトルを x_i, x_j とする。これらが満たす固有値と固有ベクトルの定義式を i と j について示せ。
- (2) 上記の結果を用いて $x_j^T A x_i$ を、 α_i を含む形で表せ。ただし T は転置を意味する。
- (3) 上記の結果を用いて $x_j^T A x_i$ を、 α_j を含む形で表せ。
- (4) 上記の結果を用いて $x_i \perp x_j$ を示せ。

数 学

[3] 物質 A が物質 B に変化する反応を考える。両者の時刻 t における濃度をそれぞれ $x_a(t)$, $x_b(t)$ とし、初期値は $x_a(0) = a > 0$, $x_b(0) = 0$ とする。また反応に際しては

$$x_a(t) + x_b(t) = a$$

が常に成り立つとする。以下の問い (1)~(5) に答えよ。

- (1) 物質 A の濃度の時間変化率 (減少率) は、物質 A の濃度のみに比例するとし、その比例係数を $k_a (> 0)$ とする。この現象を微分方程式で表現し、初期条件のもとでの解を求めよ。
- (2) 上記 (1) の反応において、物質 A の濃度が初期値の半分になるまでの時間を求めよ。
- (3) 上記 (1) の反応において、無限に長い時間が経過した後の物質 A, B の濃度はいくらになるか、答えよ。
- (4) つぎに可逆反応、すなわち物質 B も変化して物質 A に戻る反応を考える。この場合、物質 A の濃度の時間変化率は、物質 A の濃度に比例する減少分と、物質 B の濃度に比例する増加分の和によって与えられる。物質 B の濃度に対する比例係数を $k_b (> 0)$ とするとき、この現象を微分方程式で表現し、初期条件のもとでの解を求めよ。
- (5) 上記 (4) の反応において、無限に長い時間が経過した後の物質 A, B の濃度はいくらになるか、答えよ。

数 学

[4] 問い(1)～(2)に答えよ。

(1) ラプラス変換を用いて、以下の微分方程式を解け。ただし、 $x=0$ で $y=0$ 、 $y'=1$ とする。

$$y''+4y'+4y=e^{-2x}$$

(2) 以下の関数 $f(x)$ のフーリエ変換を求めよ。ただし、 $a \neq 0$ とする。

$$f(x) = \begin{cases} a, & -1 < x \leq 0 \\ -a, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x \leq -1, \quad x > 1 \end{cases}$$