２０１９年１０月入学，２０２０年４月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理科学専攻（数学系）

試験問題　＜一般入試＞

専　門　科　目

数　学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は５枚，下書き用紙は３枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，問題番号と共に１枚の解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０１９年１０月入学，２０２０年４月入学
大学院自然科学研究科　博士前期課程　数理物理科学専攻（数学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（数学)】
問題は全部で８問ある。A 系統（[A-1]～[A-4]）から３題を選択, B 系統（[B-1]～[B-4]）からは２題を選択して, 計５題について解答せよ。ただし, 以下の問題文中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ は, すべての整数からなる集合, すべての有理数からなる集合, すべての実数からなる集合, すべての複素数からなる集合をそれぞれ表すものとする。

【A 系統】

[A-1] aを実数とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2a \\ 2 & 1 & 1 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A が逆行列をもたないような a の値をすべて求めよ。

(2) 行列 A が逆行列をもたないとき, 連立１次方程式

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を解け。

(3) $a = 0$ のとき, A が対角化可能か判定せよ。

[A-2] $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする。$\mathbb{R}^3$ において, $\boldsymbol{e}_1$ が張る部分空間を W_1 とし, $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ が張る部分空間を W_2 とする。線型写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ で

$$f(W_1) \subseteq W_1, \qquad f(W_2) \subseteq W_2$$

をみたすもの全体の集合を F とする。以下の問いに答えよ。

(1) F は $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ の部分空間であることを示せ。ただし, $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ は $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線型写像全体のなすベクトル空間である。

(2) F の次元を求めよ。

(3) $f \in F$ が $f^3 = 0$ をみたすならば

$$f(\mathbb{R}^3) \subseteq W_2, \qquad f(W_2) \subseteq W_1, \qquad f(W_1) = \{0\}$$

となることを示せ。

(4) $f \in F$ で $f^3 = 0$ をみたすもの全体の集合を G とするとき, G は F の部分空間であることを示せ。また, G の次元を求めよ。

[A-3] 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で定めるとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 任意の $m \geq 0$ に対して, $\lim_{x \to 0} x^{-m} e^{-x^{-2}} = 0$ となることを示せ。

(2) 任意の $n \geq 1$ と $x \neq 0$ に対して, n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ は, $2(n-1)$ 次多項式 $g_n(x)$ を用いて, $f^{(n)}(x) = g_n(x) x^{-3n} e^{-x^{-2}}$ と表されることを示せ。

(3) 任意の $n \geq 1$ に対して, $f^{(n)}(0) = 0$ となることを示せ。

[A-4] 複素数平面内の閉円板 $|z - z_0| \leq r$ を含むある領域で正則な関数 $f(z)$ を考える。z_0 は $f(z)$ の零点で, その位数を N とする。以下の問いに答えよ。

(1) 円周 $|z - z_0| = r$ 上に関数 $f(z)$ の零点がないとして,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz$$

は, 開円板 $|z - z_0| < r$ に含まれる $f(z)$ の零点の位数の総和に等しいことを示せ。

(2) 正数 $r_0 (< r)$ を十分小さく取って, 閉円板 $|z - z_0| \leq r_0$ 上 $f(z)$ の零点は z_0 のみとする。複素数 a を

$$\text{円周 } |z - z_0| = r_0 \text{ 上の任意の } z \text{ について}, \quad 0 < |a| < |f(z)|$$

を満たしているように取るとき,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r_0}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r_0}\frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz$$

を示せ。

(3) (2) の r_0 について, さらに閉円板 $|z-z_0|\leq r_0$ 上 $f'(z)$ は z_0 を除いて 0 にならないと仮定すると, $f(z)=a$ となる開円板 $|z-z_0|<r_0$ 上の相異なる点 z がちょうど N 個存在することを示せ。

【B 系統】

[B-1] Rを可換環とする。RのイデアルIに対して

$$\sqrt{I}=\{x\in R \mid \text{ある自然数}\, n\, \text{に対して}\, x^n\in I\}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\sqrt{I}$ も Rのイデアルであることを示せ。

(2) Iが素イデアルのときには, $\sqrt{I}=I$ となることを示せ。

(3) $\sqrt{I}$ は Iを含む素イデアルの共通部分と等しいことを示せ。

(4) $R=k[x,y,z]$ を体 k 上の 3 変数多項式環とする。この Rのイデアル $I=(x^2-yz^3, xy-x^3, y^2z^2)$ について $\sqrt{I}$ を求め, それを Rの素イデアルの共通部分として表せ。

[B-2] 以下の問いに答えよ。

(1) Xを位相空間, Yを集合とする。$f:X\longrightarrow Y$を全射とし, fにより定まるXの商空間Yを考える。Yの部分集合Aが商空間Yの開集合であることの定義を述べよ。

(2) $\mathbb{R}$に同値関係を

$$x\sim y \Longleftrightarrow x-y\in\mathbb{Z} \qquad (x,y\in\mathbb{R})$$

で定義し, $p:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}/\!\sim$ を自然な射影とする。$\mathbb{R}$に通常の位相を入れ, pにより定まる商空間 $\mathbb{R}/\!\sim$ を考える。以下の問いに答えよ。

(a) $\mathbb{R}/\!\sim$ はハウスドルフ空間であることを示せ。

(b) $\mathbb{R}/\!\sim$ はコンパクト空間であることを示せ。

[B-3] $x>0,\ y\in\mathbb{R}$ に対して $u(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$ とする。

(1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を求めよ。

(2) $\Omega=\{(x,y)\,|\,1\le x,\ 0\le y\le x\}$, α を正の定数とする。広義積分

$$\iint_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^\alpha dxdy$$

が収束するような α の範囲を求めよ。

[B-4] 2行2列の行列 $A,\ B,\ C,\ T$ を

$$A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}12&-7\\7&-4\end{pmatrix}$$

と定め, 集合 $\mathcal{E}$ を

$$\mathcal{E}=\{A^k,\ B^m,\ C^n\mid k,\ m,\ n\in\mathbb{Z}\}$$

と定める。以下の問いに答えよ。

(1) 任意の整数 $u,\ v$ に対し, 行列 $P(u)=\begin{pmatrix}1&u\\0&1\end{pmatrix}$, $Q(v)=\begin{pmatrix}1&0\\v&1\end{pmatrix}$ は $\mathcal{E}$ に属すことを示せ。

(2) 行列 T をいくつかの $\mathcal{E}$ の元の積で表せ。

(3) 行列 T は 3 個の $\mathcal{E}$ の元の積では表しえないことを証明せよ。