平成３１年４月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理科学専攻（物理学系）

試験問題　<一般入試>

専　門　科　目

物　理　学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は４枚，下書き用紙は４枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

平成３１年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第１問

密度が一様で，半径がR，高さがh，質量がMの円柱を，図１のように水平とθの角をなす粗い斜面上に静かに置く。斜面に沿って下向きにx軸をとる。斜面の静止摩擦係数をμ，動摩擦係数をμ'，重力加速度の大きさをgとする。

（１）円柱の中心軸のまわりの慣性モーメントは $I=\dfrac{R^2}{2}M$ となることを計算で示せ。
（２）円柱が斜面から受ける摩擦力の大きさをFとし，円柱の重心のx方向の加速度の大きさをaとする。円柱の重心のx方向の運動方程式を表せ。
（３）円柱の中心軸のまわりの回転の運動方程式を角速度ωを使って表せ。
（４）θが小さいときには，円柱が斜面をすべらずに転がり落ち，θがある値よりも大きくなると，円柱はすべりながら落ちるようになる。円柱がすべらずに転がり落ちるときのμとθとの関係を求めよ。
（５）円柱がすべらずに転がり落ちるときの，円柱の重心の速度を求めよ。ただし，R，h，M，θ，μ，μ'，gをのうち必要な物理量を用いること。
（６）円柱がすべりながら転がり落ちるときの円柱の重心の速度を求めよ。ただし，R，h，M，θ，μ，μ'，gをのうち必要な物理量を用いること。

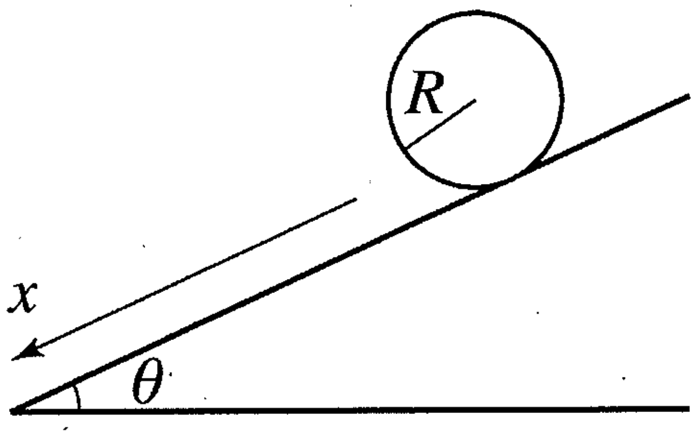

図１

平成３１年４月入学

大学院自然科学研究科　博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）

試験問題＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第２問

図２のように平面電磁波が, 誘電率 ϵ_a, 透磁率 μ_a の媒質 a から, それらが ϵ_b, μ_b である媒質 b に, 境界面に垂直に入射したとき, 電磁波の反射率および透過率を求めたい。ただし, 両媒質ともに絶縁媒質であり, 電気伝導度は考えなくてよいものとする ($\sigma = 0$)。入射電磁波の進行方向を z 軸の正の向きとする。以下の問いに答えよ。

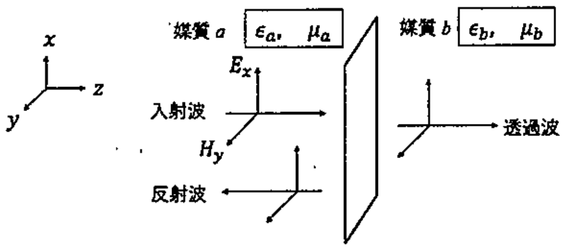

図２

(1) Maxwell 方程式から電場 $\vec{E}$ の x 成分 E_x に関する電磁波の波動方程式が

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \epsilon\mu\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

と導出できることを示せ。ただし, 以下に誘電率 ϵ, 透磁率 μ の媒質中における Maxwell 方程式を示しておく (電流密度はゼロとする)。

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$
$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho$$
$$\mathrm{div}\vec{B} = 0$$

ここで、$\vec{D}, \vec{H}, \vec{B}, \rho$ はそれぞれ電束密度, 磁場, 磁束密度, 電荷密度を表す。

(2) 電場が x 軸方向, 磁場が y 軸方向にそれぞれ偏光している電磁波を考える。(1) で導出した波動方程式において, 角振動数 ω で振動し, z 軸の正に進む解は

$$E_x(z,t) = E_0\cos(kz - \omega t)$$

の型で表せる (k は波数)。電磁波の伝わる速度 v が誘電率 ϵ と透磁率 μ を用いて

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

と書けることを示せ。

(3) 問 (2) で使用した z の正に進む解 $E_0 \cos(kz - \omega t)$ を考えたとき, この解の形と Maxwell 方程式から, 電場と磁場の x, y 成分の振幅の比が

$$\frac{H_y}{E_x} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$$

の関係になること, つまり振幅の比として $H/E = \sqrt{\epsilon/\mu}$ となることを導出せよ。

(4) Maxwell 方程式を用いて, $\vec{E}$, $\vec{H}$ に対する境界条件について説明せよ。
さらに, 図 2 において媒質 a と媒質 b の境界面にこの境界条件を適用し, 問 (3) の結果も用いて, 入射波と反射波の電場振幅比 E_1/E_0, および入射波と透過波の電場振幅比 E_2/E_0 をそれぞれの媒質の誘電率, 透磁率を使って表せ。ここで, 入射波, 反射波, 透過波の電場の振幅をそれぞれ E_0, E_1, E_2 としている。ただし, 入射波と反射波の電場の位相が境界面で反転する場合を考えよ。

(5) 問 (4) の結果を用いて, 電磁波が空気からガラスに垂直に入射する際の反射率および透過率を求めよ。ただし, 空気の屈折率を $n_1 = 1.0$, ガラスの屈折率を $n_2 = 1.5$ とし, 透磁率に関しては両者とも真空中のもの (μ_0) に等しいと近似する。また電磁波のエネルギーの流れは, その媒質の誘電率, 透磁率を使って $EH = \sqrt{\epsilon/\mu}E^2$ と表せることに注意せよ。

平成３１年４月入学
大学院自然科学研究科　博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　<一般入試>

【試験科目：専門科目（物理学）】

第３問

次のハミルトニアンで記述される１次元の調和振動子を考える。

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \tag{i}$$

ただし $\hat{x}$ は位置演算子，$\hat{p}$ は運動量演算子であり，h をプランク定数として $\hbar = h/2\pi$ とする。

(1) 演算子 $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)$, および $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)$ を定義する。位置演算子と運動量演算子の正準交換関係を用いて，関係式 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 演算子 $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ を定義する。ハミルトニアンが $\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$ のように変形できることを示せ。

(3)　以下の問いに答えよ。

(a) 演算子 $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ の基底状態を $|\phi_0\rangle$, その固有値を λ_0 とする。この定義より

$$\hat{N}|\phi_0\rangle = \lambda_0|\phi_0\rangle, \tag{ii}$$

が成り立つ。また，基底状態は次の重要な関係式を満足する。

$$\hat{a}|\phi_0\rangle = 0 \tag{iii}$$

式 (ii) に左から $\langle\phi_0|$ を作用させ，かつ式 (iii) を用いることで，λ_0 の値を求めよ。

(b) 第一励起状態を $|\phi_1\rangle$, その固有値を λ_1 とする。この定義より

$$\hat{N}|\phi_1\rangle = \lambda_1|\phi_1\rangle \tag{iv}$$

が成り立つ。また，第一励起状態は $|\phi_1\rangle = \hat{a}^\dagger|\phi_0\rangle$ を満たす。関係式 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を用いて，第一励起状態の固有値 λ_1 を求めよ。

(4) 式 (iii) を位置表示して，基底状態の波動関数 $\phi_0(x) = \langle x|\phi_0\rangle$ が満足する微分方程式を書き下せ。また，この波動関数を求めよ。波動関数を規格化する際に，必要であれば次のガウス積分の結果を用いよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

(5) $|\phi_0\rangle$ と $|\phi_1\rangle$ のみで張られる状態に制限すれば，式 (i) のハミルトニアンは以下のように行列表示できる：

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}, \qquad \left(\text{ただし}\, \varepsilon_0 = \hbar\omega\left(\lambda_0 + \tfrac{1}{2}\right),\ \varepsilon_1 = \hbar\omega\left(\lambda_1 + \tfrac{1}{2}\right) \right) \tag{v}$$

今，この系に摂動が加わり，新たなハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}'$ が次式で与えられる状況を考える。

$$\hat{\mathcal{H}}' = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & \Delta \\ \Delta & \varepsilon_1 \end{pmatrix} \tag{vi}$$

ただし，Δ は正の実数だとする。

(a) 式 (vi) のハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}'$ の２つの固有値 ε_0', ε_1'（ただし $\varepsilon_0' < \varepsilon_1'$ とする）を求めよ。

(b) $\Delta \ll \varepsilon_0, \varepsilon_1$ の時に，ε_0' は ε_0 より大きくなるか小さくなるかを答えよ。更に，ε_1' は ε_1 より大きくなるか小さくなるかも答えよ。

(c) 固有値 ε_0' に対応する固有状態 $|\phi_0'\rangle$ を，$|\phi_0\rangle$ と $|\phi_1\rangle$ の線型結合として書き下せ。ただし，結果は Δ の１次までの近似で示せば良く，固有状態のノルムもこの近似の範囲で１に規格化すること。

平成３１年４月入学
大学院自然科学研究科　博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学)】

第４問

以下の問いに答えよ。ただし，プランク定数を h とするとき，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ であり，ボルツマン定数を k_B とする。必要があれば，次の積分公式を使っても良い。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

(1) 熱力学の基本式 $dE = TdS - PdV + \mu dN$ は，内部エネルギー E の微小変化が系のエントロピー S, 体積 V, 粒子数 N の独立な微小変化によって起こることを表現している。ただし，T, P, μ はそれぞれ，絶対温度，圧力，化学ポテンシャルである。熱力学ポテンシャル Ω を $\Omega = E - TS - \mu N$ により定義するとき，$d\Omega$ を求め，$N = -\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{T,V}$ の関係式が成り立つことを示せ。

(2) E, S, V, N は示量変数であり，E が S, V, N の関数であることから，考える系が λ 倍にスケール変化された場合に $\lambda E(S,V,N) = E(\lambda S, \lambda V, \lambda N)$ の関係が成り立つはずである。この式を利用して

$$E = S\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N} + V\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N} + N\left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,V}$$

の関係式が成り立つことを示せ。前問やこの関係式を利用して $\Omega = -PV$ が成り立つことを示せ。

(3) 一般に，相互作用しないボース粒子系の大分配関数 Ξ は，j 番目の１粒子固有エネルギーを ϵ_j とし，その状態を占める粒子数を n_j とするとき，

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_j\}} e^{-\beta \sum_j (\epsilon_j - \mu) n_j}$$

と書くことができる。ただし，$\{n_j\}$ に関する和は $N = \sum_j n_j$ を満たす様々な n_j $(j = 1, 2, 3, \cdots)$ の取り方に関する和を表している。また，$\beta = (k_B T)^{-1}$ である。この式を大きい体積 V の中に閉じ込められたボース粒子系に適用しよう。粒子の質量は m でありスピンを持たないとする。その１粒子エネルギーは波数ベクトルを $\mathbf{k}$ とすると $\epsilon_{\mathbf{k}} = \dfrac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m}$ である。一般に系の大分配関数 Ξ と熱力学ポテンシャル Ω の間には $\Omega = -k_B T \ln \Xi$ の関係が成り立つことや，前問までの結果を利用して

$$PV = \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} d\epsilon$$

となることを示せ。また

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} d\epsilon$$

が成り立つことを示し，この式から高温極限 (古典極限) における μ が次式により与えられることを示せ。

$$\frac{\mu}{k_B T} = \ln\left[\frac{N}{V}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m k_B T}\right)^{3/2}\right]$$