２０２２年１０月入学，２０２３年４月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理科学専攻（物理学系）

試験問題　＜一般入試＞

専　門　科　目

物　理　学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は４枚，下書き用紙は４枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０２２年１０月入学，２０２３年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第１問

図 1 のように，ばねによって結ばれた 2 つのビーズが，硬いワイヤーでつくられた円環を滑らかに動くような系を考える。水平方向にy軸を，鉛直方向にz軸をとる直交座標系(x, y, z)を，円環の中心が原点になるようにとる。ばねはy軸に平行であり，2 つのビーズは同じz座標をとる。各ビーズの質量をm，ばね定数をk (>0)，円環の半径をRとする。2 つのビーズの距離を$2r$，ばねの自然長を$2r_0$とし$(r_0 < R)$，円環はz軸を中心にして，角速度ωで回転する。ばねの質量は無視できるとし，重力の影響は考慮しない。また，円環は回転に対して変形しないものとする。次の各問いに答えよ。

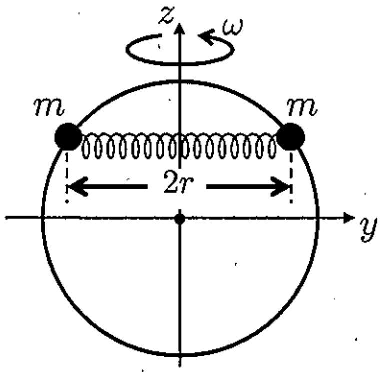

図 1

(1) 円環が回転していない場合のビーズのz座標z_0を示せ。

(2) この系のラグラジアン $\mathcal{L}$ を円筒座標系(r, φ, z)において示せ。φはz軸まわりのx軸からの角度をあらわす。更に，これが

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{z}^2 - V_e(z)$$

のように，zに関する 1 次元の関数であらわされることを示せ。ここでμ，V_eは，それぞれzのみに依存する有効質量と有効ポテンシャルであり

$$\mu = 2m(1 - z^2/R^2)^{-1}$$

$$V_e = 2k\left(\sqrt{R^2 - z^2} - r_0\right)^2 - m\omega^2(R^2 - z^2)$$

で与えられる。

(3) 以下では，円環を回転させた際のビーズの安定平衡位置を考える。安定平衡位置のz座標をz_ωとしたとき，ある角速度ω_cを境にして，$\omega > \omega_c$ではビーズは$z_\omega = 0$ にあり，$\omega < \omega_c$においては$z_\omega \neq 0$となる。$\xi = 2kr_0/(2k - m\omega^2)$とするとき，$\omega < \omega_c$におけるビーズの安定平衡位置$z_\omega$を求め，$R$および$\xi$を用いてあらわせ。また，この系の運動と照らし合わせて，ξがあらわす長さが何か答えよ。

(4) 角速度の臨界値ω_cを求めよ。

この力学モデルは，相転移理論と多くの共通点を有する。即ち，角速度ωは相転移問題における温度，ビーズの位置z_ωは秩序変数に対応して考えることができ，$\omega > \omega_c$では$z_\omega = 0$が安定となるような相，$\omega < \omega_c$では$z_\omega \neq 0$が安定となる鏡面対称性が自発的に破れた相にある。以下では，この系の対称性の破れについて考える。次の各問いに答えよ。

(5) $z_\omega \neq 0$となりはじめる$\omega = \omega_c$近傍においては，zは微小であり，

$$V_e = V_0 + \alpha z^2 + \frac{\beta}{2} z^4 + \cdots$$

のようにV_eを展開可能である。

$$\alpha \approx 2m\omega_c(\omega - \omega_c)$$

$$\beta = \frac{kr_0}{R^3}$$

であることを示せ。近似計算を行う場合，どのような近似を行ったのか明示すること。

(6) 有効ポテンシャルV_eのz依存性について，$\omega > \omega_c$，および$\omega < \omega_c$での概形をグラフに図示せよ。

(7) $\omega < \omega_c$においては$z_\omega \neq 0$が安定である。このことに基づき，$\omega = \omega_c$近傍におけるz_ωの表式を導出し，これをω/ω_cの関数としてz_0, r_0, Rを用いてあらわせ。また，これを受けて，z_ωのω/ω_c依存性をグラフに図示せよ。$\omega = 0$での値を明示すること。

２０２２年１０月入学，２０２３年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第２問

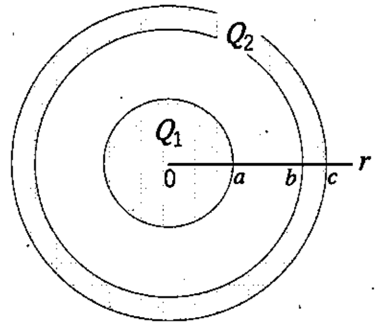

図２

次の各問いに答えよ。

(1) 半径 a の導体球と，内半径 b と外半径 c をもつ導体の球殻（$a < b < c$）を考える。両球の中心は原点にある。内側の球に電荷 Q_1 を与え，さらに外の球殻に電荷 Q_2 を与える。球も球殻も真空中にあり真空の誘電率をε_0とする。また $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$ である。原点からの距離を r とするとき，以下の問いに答えよ。

(a) 位置 r における動径方向の電場 $E(r)$ を求めよ。

(b) 位置 r における電位 $V(r)$ を求めよ。但し電位は無限遠で 0 V とする。

(c) 解答用紙に，電位$V(r)$ の概形を区間ごとに示せ。

(2) 電磁場の基本方程式である Maxwell 方程式に関する以下の問いに答えよ。なお真空中として考えて良い。真空中の誘電率と透磁率はそれぞれ ε_0 と μ_0 とする。

(a) 磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ 中に置かれた閉曲線 c を考える。$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ が時間変化するとき電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ を c に沿って線積分した値と$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$の関係は $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ となり，Maxwell 方程式のひとつとなる。この式では負の記号が用いられているが，その物理的な意味を述べよ。

(b) 同様に $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0$ という式の物理的意味を述べよ。

(c) 残りの２つの Maxwell 方程式を書け。

(d) Maxwell の 4 方程式から電磁波の存在を示す $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ と $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ の波動方程式をそれぞれ導出せよ。導出にはベクトル解析の公式 $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}) - \nabla^2 \boldsymbol{a}$ を用いて良い。

２０２２年１０月入学，２０２３年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第３問

次の各問いに答えよ。

(1) ベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$での電磁場中を動く質量m，電荷qの荷電粒子のラグランジアンは，一般化座標を $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ と置くと以下のように書ける。

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2+q\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}$$

一般化運動量 $\boldsymbol{p}$ の各成分を求めた上で，ハミルトニアンが

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})=\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2$$

となることを示せ。

(2) 以後は運動を量子力学的に取り扱う。運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{p}}=-i\hbar\nabla$ を用いて，位置演算子 $\hat{\boldsymbol{r}}$ との交換関係 $[\hat{p}_j,\hat{r}_k]$（ただし $j,k=x,y,z$）を計算せよ。

(3) 問(1)のハミルトニアンを，微分演算子$\boldsymbol{\nabla}$の多項式で表わせ。ただし$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=0$ が成り立つものとする。

(4) ベクトルポテンシャルとして，$\boldsymbol{A}=\left(-\frac{B}{2}y,\frac{B}{2}x,0\right)$ が与えられた時，磁場を導出せよ。ただし B は定数とする。

(5) この磁場による効果を考える。磁場がない場合と比べて，ハミルトニアンに加わる項を軌道角運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{L}}=(\hat{L}_x,\hat{L}_y,\hat{L}_z)$ を用いて表わせ。ただし，q^2 以上の高次の項は無視できるとする。

(6) 続いてスピンの効果を考える。スピン角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{S}}=(\hat{S}_x,\hat{S}_y,\hat{S}_z)$ と置くと，問(5)の $\hat{\boldsymbol{L}}$ は $\hat{\boldsymbol{L}}+g\hat{\boldsymbol{S}}$ と置き換えられる。ここで量子数 $l=1$ の軌道角運動量の状態にあるスピン 1/2 の荷電粒子に問(4)の磁場がかかった場合，エネルギー準位が何通りに分岐するかを，図３にならって示せ。その際，それぞれの準位における軌道角運動量とスピン角運動量の磁場方向の固有値も記載すること。ただし $g=2$ とし，スピン軌道相互作用の高次効果は無視する。またこの場合に，完全に縮退が解けるかどうかを記述せよ。

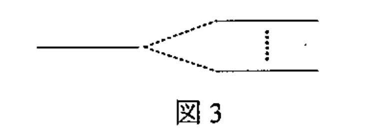

図３

２０２２年１０月入学，２０２３年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第４問

体積 V の箱に，N 個の窒素分子 N_2 から成る気体が閉じ込められている。分子間の相互作用および重力の影響は無視できるとする。この二原子分子気体の定積比熱 $C(T)$ について考える。この系を温度 T の熱浴に接するカノニカル集団として扱うと，分配関数 Z は

$$Z = \frac{1}{N!} Z_{\mathrm{tr}} Z_{\mathrm{rot}} Z_{\mathrm{vib}}$$

で表される。ここで，Z_{tr}，Z_{rot}，Z_{vib} はそれぞれ重心の並進運動，分子の回転運動，分子の伸縮（振動）運動の寄与を表す。同様に，定積比熱 $C(T)$ は

$$C(T) = C_{\mathrm{tr}}(T) + C_{\mathrm{rot}}(T) + C_{\mathrm{vib}}(T)$$

と分解できる。ボルツマン定数を k_{B} とする。以下の問いに答えよ。

(1) 一般に，平均エネルギー E と分配関数 Z の間に次の関係があることを示せ。

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z$$

ここで，$\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$ である。

(2) ひとつの分子に対する並進運動のハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_{\mathrm{tr}} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$$

で与えられる。ここで，m は分子の質量，(p_x, p_y, p_z) は分子の重心運動量である。分配関数 Z_{tr} を $Z_{\mathrm{tr}} = {Z_1}^N$ と表すとき，1 分子の分配関数 Z_1 を求めよ。必要であれば，次の積分公式を使ってよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0)$$

(3) 並進運動による定積比熱 $C_{\mathrm{tr}}(T)$ が $C_{\mathrm{tr}}(T) = \alpha N k_{\mathrm{B}}$ となることを示し，温度に依らない定数 α を求めよ。

(4) 室温における窒素分子気体の定積比熱はおよそ $C = (5/2)Nk_{\mathrm{B}}$ であることが知られている。これは，並進運動の寄与 C_{tr} に加えて，回転運動の寄与 C_{rot} があるためである。回転運動の定積比熱の大きさを，古典論におけるエネルギー等分配則の観点から説明せよ。

(5) 分子の振動運動を量子力学的な調和振動として扱うと，1分子のハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_{\mathrm{vib}} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

で与えられる。ここで，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったもの，ω は角振動数，n は振動の大きさを表す量子数 $n = 0, 1, 2, \cdots$ である。N 個の分子の振動運動の分配関数 Z_{vib} を求めよ。

(6) 振動運動による比熱 $C_{\mathrm{vib}}(T)$ を温度 T の関数として求めよ。

(7) 振動運動は室温において定積比熱に寄与をしない。その理由を説明せよ。