岡山大学大学院自然科学研究科
2023 年度博士前期課程入学試験問題
機械システム工学専攻システム系

数学

注意事項

1．解答始めの合図があるまで、中の頁を見てはいけない。
2．問題用紙は 4 枚ある。
3．解答用紙は、［1］、［2］、［3］、［4］の 4 枚および下書き用紙 1 枚の計 5 枚ある。
4．解答始めの合図があったら、中の頁を見て枚数を確認すること。また、すべての解答用紙に、受験番号を記入すること。
5．解答は、それぞれの問題の解答欄に記入すること。他の問題の解答を記入してはいけない。
6．解答欄が足りないときは、同じ問題の解答用紙の裏に記入してもよいが、その場合、裏に記入していることを表の頁に書いておくこと。

令和 4 年 8 月 24 日
岡山大学大学院自然科学研究科
機械システム工学専攻システム系

数　学

[1]　問い(1)～(2)に答えよ.

(1)　つぎの極限値を求めよ.

(i)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

(ii)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)$　$(a>0)$

(iii)　$\displaystyle\lim_{x\to +0}\left(\frac{1}{x}\right)^x$

(2)　曲線 $\begin{cases} x=t-t^3 \\ y=1-t^4 \end{cases}$ によって囲まれた部分の面積を求めよ.

数　学

[2] 問い(1)～(2)に答えよ.

(1) $\mathbb{R}^3$において,

$$a=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\ d=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

とする. W_1, W_2を$\mathbb{R}^3$の線形部分空間とし, W_1はa, bで生成される線形部分空間, W_2はc, dで生成される線形部分空間とする. このとき, $W_1 \cap W_2$, および$W_1 + W_2$の次元と一組の基底をそれぞれ求めよ. ただし,

$$W_1 + W_2 = \{x + y \in \mathbb{R}^3 \mid x \in W_1, y \in W_2\}$$

である.

(2) αを実数とし, $A=\begin{bmatrix}\alpha & -2 & 1\\-1 & 3 & -1\\1 & -2 & \alpha\end{bmatrix}$とする. Aの固有値の一つが1であるとき, 以下の小問(i)-(ii)に答えよ.

(i) αの値を求めよ.

(ii) Aを対角化するための正則行列Pを求め, それを用いてAを対角化せよ.

数学

[3]　微分方程式

$$\frac{d}{dt}p(t) = \lambda(t, p(t))p(t)$$

を考える．初期値を $p(0) = 1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\lambda(t, p(t))$ が以下のように与えられるとき，それぞれの解を求めよ．

$$\lambda(t, p(t)) = 1, \qquad (a)$$

$$\lambda(t, p(t)) = \frac{10 - p(t)}{9}, \qquad (b)$$

$$\lambda(t, p(t)) = t + 1, \qquad (c)$$

$$\lambda(t, p(t)) = \frac{1}{t+1}. \qquad (d)$$

(2) 前問の解をグラフに表したところ，図 1 のようになった．(a)〜(d) が図中のア〜エのどれに対応するか，理由を付して答えよ．ただし，以下の値 (有効数字 2 桁) を参考にしてよい．

$e^{-3} \simeq 0.050$, $e^{-2} \simeq 0.14$, $e^{-1} \simeq 0.37$, $e^{1} \simeq 2.7$, $e^{1.5} \simeq 4.5$, $e^{2} \simeq 7.4$

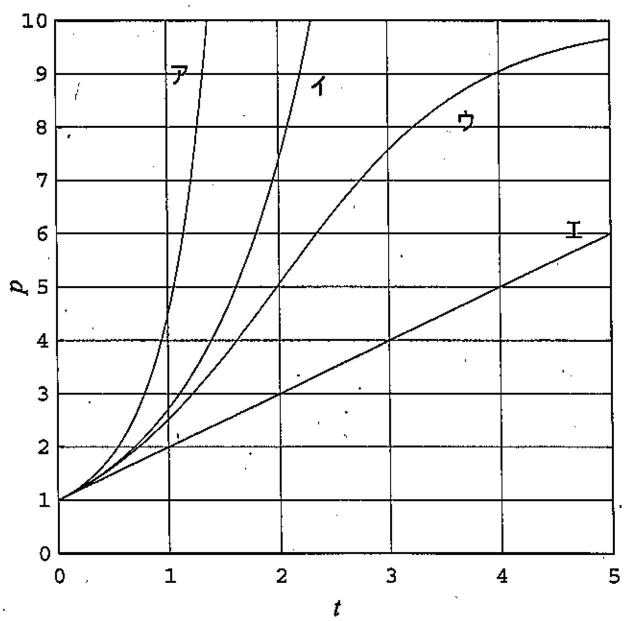

図 1

数　学

［4］問い(1)～(2)に答えよ。

(1) ラプラス変換を用いて以下の(A)、(B)の微分方程式の解を求めよ。

$y'' + 2y' + 2y = 0,\ (x = 0,\ y = 1)$かつ$(x = 0,\ y' = 0)$　　　(A)

$y'' - y = 0,\ (x = 0,\ y = 0)$かつ$(x = 0,\ y' = 1)$　　　(B)

(2) $f(t)$が以下の式(C)で与えられるとき、フーリエ変換$F(\omega)$を求めよ。ただし、$F(\omega)$は以下の式(D)で求められるものとする。

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}t^2, & -1 \leq t \leq 1 \\ 0, & t < -1,\quad t > 1 \end{cases} \qquad \text{(C)}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \qquad \text{(D)}$$