２０２３年４月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理科学専攻（数学系）

試験問題　＜一般入試＞

専　門　科　目

数　学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は５枚，下書き用紙は３枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０２３年４月入学
大学院自然科学研究科　博士前期課程　数理物理科学専攻（数学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（数学)】

問題は全部で7問ある。A 系統（[A-1]〜[A-4]）から３題を選択，B 系統（[B-1]〜[B-3]）からは２題を選択して，計５題について解答せよ。ただし，以下の問題文中の $\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$ は，すべての実数からなる集合，すべての複素数からなる集合をそれぞれ表すものとする。

【A 系統】

[A-1] a を実数とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) $a = \pm 2$ のとき，A が対角化可能か判定せよ。

(3) A が対角化可能となるような a の条件を求めよ。

[A-2] V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$f : V \to V$ と $g : V \to V$ を線形写像とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{rank}(f \circ g) \leq \min\{\mathrm{rank}\, f, \mathrm{rank}\, g\}$ を示せ。

(2) $\mathrm{Im}(f+g) \subseteq \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$ を示せ。

(3) $\mathrm{rank}(f+g) \leq \mathrm{rank}\, f + \mathrm{rank}\, g$ を示せ。

(4) (3) において等号が成立しない例を挙げよ。

[A-3] $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ を有界でない連続関数とする。正の整数 n に対して，$[0,\infty)$ の部分集合 F_n を

$$F_n=\{x\in[0,\infty)\mid f(x)\geq n\}$$

と定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) すべての正の整数 n について，F_n は $[0,\infty)$ における空でない閉集合であることを示せ。

(2) 正の整数 n に対して，$x_n=\inf F_n$ とする。

(2-1) すべての正の整数 n について，$x_n\in F_n$ であることを示せ。

(2-2) すべての正の整数 n について

$$f(x_n)=\begin{cases} f(0), & n\leq f(0) \\ n, & n>f(0) \end{cases}$$

であることを示せ。

(2-3) $\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$ であることを示せ。

[A-4] $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ 上の正則関数 (整関数) とする。以下の問いに答えよ。

(1) 正の実数 r と整数 m に対して，積分

$$\int_{|z|=r} z^m dz$$

の値を求めよ。

(2) $f(z)$ を原点を中心とするべき級数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$$

で表したとき，正の実数 r と非負整数 m に対して，積分

$$\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{m+1}}dz$$

を a_m を用いて表せ。

(3) ある定数 $K>1$ とある非負整数 n に対して $|f(z)|\leq K|z|^n$ $(z\in\mathbb{C})$，かつ，$f(1)=1$ が成り立つとき，$f(z)$ を求めよ。

【B 系統】

[B-1] R を単位元を持つ可換環とする。R のイデアル $\mathfrak{q}$ に対し，$\mathfrak{q} \neq R$ かつ

$$x, y \in R,\ xy \in \mathfrak{q} \text{ ならば, 「} x \in \mathfrak{q} \text{ またはある正の整数 } n \text{ に対して } y^n \in \mathfrak{q} \text{」}$$

が成り立つとき，$\mathfrak{q}$ は準素イデアルであるという。

また $x_1, \ldots, x_l \in R$ で生成される R のイデアルを $(x_1, \ldots, x_l)$ と表す。以下の問いに答えよ。

(1) R の準素イデアル $\mathfrak{q}$ に対し，$\sqrt{\mathfrak{q}} = \{x \in R \mid$ ある正の整数 n に対して $x^n \in \mathfrak{q}\}$ とおく。このとき $\sqrt{\mathfrak{q}}$ が R の素イデアルであることを示せ。ただし $\sqrt{\mathfrak{q}}$ がイデアルであることは示さなくてよい。

(2) $\mathbb{C}[X]$ を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の 1 変数多項式環とする。$a \in \mathbb{C}$ と正の整数 k に対し，$(X-a)^k \in \mathbb{C}[X]$ で生成される $\mathbb{C}[X]$ の単項イデアル $((X-a)^k)$ は準素イデアルであることを示せ。

(3) (2) の単項イデアル $((X-a)^k)$ に対し，$\sqrt{((X-a)^k)}$ を求めよ。

(4) $\mathfrak{q}$ を零イデアルではない $\mathbb{C}[X]$ の準素イデアルとする。ある $a \in \mathbb{C}$ と正の整数 k が存在して $\mathfrak{q} = ((X-a)^k)$ が成り立つことを示せ。

[B-2] S を次で定義される写像 $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ によってパラメータ表示された正則曲面とする。

$$x(u_1, u_2) = \left(u_1 - \frac{u_1^3}{3} + u_1 u_2^2,\ u_2 - \frac{u_2^3}{3} + u_2 u_1^2,\ u_1^2 - u_2^2\right), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$$

ここで，各 $m \in \{2, 3\}$ に対して，$\mathbb{R}^m$ は m 次元ユークリッド空間を表し，(u_1, u_2) は $\mathbb{R}^2$ の標準座標を表す。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) S の第 1 基本量をすべて求めよ。

(2) S の第 2 基本量をすべて求めよ。

(3) S の主曲率を求め，S のガウス曲率 K と平均曲率 H を定義より求めよ。

(4) $\int_S K dS$ を求めよ。ここで，dS は S の面積要素を表す。

[**B-3**] 以下の問いに答えよ。

(1) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{3x}, \quad x > 0$$

の一般解を求めよ。

(2) 微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{3x} + \dfrac{2x}{y}, \quad x > 0 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

の解 $y = y(x)$ を求めよ。ただし，変換 $z = y^2$ を用いてもよい。