２０２２年４月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理科学専攻（物理学系）

試験問題　<一般入試>

専　門　科　目

物　理　学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は４枚，下書き用紙は４枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０２２年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第１問

図１に示すように，固定された点Ｏから伸びた長さ ℓ のひもに質量 m の小球Ａが吊り下げられている。小球Ａは点Ｏを中心とする半径 ℓ の球面上を自由に運動する。ひもは真っ直ぐに伸びたまま運動するものとする。ひもの質量，小球の大きさ，空気抵抗と点Ｏでの摩擦は無視できるものとする。また，重力は鉛直下向きに作用し，重力加速度は g とする。

ここで，図２に示すように，点Ｏを原点にして，z 軸を鉛直上向きに，x 軸，y 軸を水平面にとったデカルト座標系 (x,y,z) および，原点Ｏからの距離を r，z 軸とひものなす角をθ，水平面内の x 軸となす角を ϕ にとった極座標系 (r,θ,ϕ) を用いて，小球Ａの位置を表すとき，以下の各問いに答えよ。

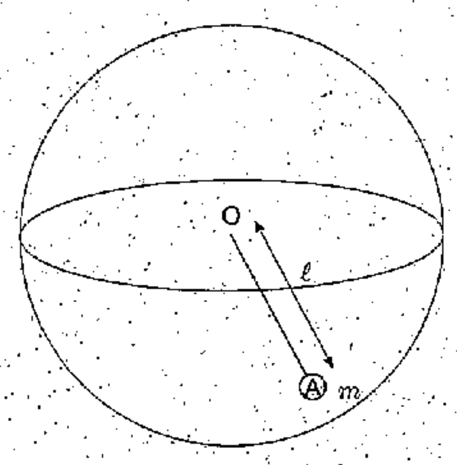

図１

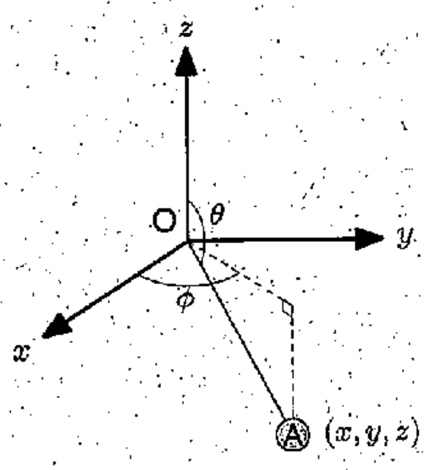

図２

(1) 小球 A がある時刻 t において位置 (x, y, z) にあり，速度 $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ で運動しているとき，運動エネルギー K と位置エネルギー U をデカルト座標系において求めよ。位置エネルギーは最下点 $\theta = \pi$ を基準とする。

(2) 小球 A の位置および速度を極座標系に変換し，問(1)で求めた運動エネルギー K と位置エネルギー U を極座標により表せ。ただし，r は時間によらず一定であることに留意すること。

(3) 小球 A の運動は θ と ϕ で記述することができる。極座標におけるラグランジアン $L = K - U$ から，オイラー=ラグランジュ方程式を θ と ϕ について求め，小球 A の運動を連立する 2 つの微分方程式として示せ。

(4) ラグランジアンは座標 ϕ を含まないため，問(3)で求めた微分方程式のうち，ϕ に関するものは，ある物理量の時間微分が 0 であること，即ち，その物理量が保存されることを表している。この保存量が小球 A の z 軸まわりの回転運動に対する角運動量であることを示せ。

まず，$\dot{\phi} = 0$ （ϕ 方向の速度が 0）の場合を考える。

(5) 小球 A の θ 方向の運動を表す運動方程式を示して，それがどのような運動かを説明せよ。小球 A が最下点付近のみを微小に動くとき $(\pi - \theta \ll 1)$，その周期を求めよ。

つぎに，$\dot{\theta} = 0$, $\dot{\phi} = \omega$ $(\neq 0)$ の場合を考える。このとき，θ がある値 θ_0 $(> \pi/2)$ であれば，θ 方向の加速度 $\ddot{\theta}$ が 0 になり，小球 A は $\theta = \theta_0$ を保ちながら，水平面内を ϕ 方向に一定の角速度 ω で回転し続ける。

(6) θ_0 , ω の満たすべき条件式を求め，ω を θ_0 , ℓ , g を用いて表せ。このとき小球 A の周期を求めよ。

２０２２年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第２問

電荷および電流が存在しない真空中で，電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ および磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ が満たすマクスウエル方程式は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=0$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$

である。ただし，ε_0 と μ_0 は，それぞれ真空の誘電率と透磁率である。真空中の電磁波について考える。以下の各問いに答えよ。

(1) 任意のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})=(V_x(\boldsymbol{r}),V_y(\boldsymbol{r}),V_z(\boldsymbol{r}))$ について，次の公式が成り立つことを示せ。

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{V})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V})-\nabla^2\boldsymbol{V}$$

(2) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ および $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ が満たす波動方程式をそれぞれ導け。

電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ および磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ として次の平面波を考える。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{B}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

ただし，$\boldsymbol{E}_0=(E_{0x},E_{0y},E_{0z})$，$\boldsymbol{B}_0=(B_{0x},B_{0y},B_{0z})$ であり，$\boldsymbol{k}=(k_x,k_y,k_z)$ および ω は，それぞれ波数ベクトルと角周波数である。

(3) これらの平面波が問(2)で示した波動方程式の解である場合に成り立つ分散関係を示し，電磁波の速さ c を求めよ。

(4) このとき，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ および $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ が，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0$ および $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=0$ を満たすことをそれぞれ示し，その物理的な意味について述べよ。

(5) このとき，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ と $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ が互いに垂直であることを示せ。

(6) 電磁気的なエネルギー密度 u は，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ と $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ による，それぞれのエネルギー密度 $\frac{1}{2}\varepsilon_0|\boldsymbol{E}|^2$ と $\frac{1}{2\mu_0}|\boldsymbol{B}|^2$ の和で与えられる。平面波の場合に，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ と $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ のエネルギー密度が等しいことを示せ。

(7) 単位面積を微少時間 Δt の間に通過する電磁波のエネルギーは，ポインティングベクトル

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon_0 c^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$$

を用いて，$\boldsymbol{S}\Delta t$ で与えられる。平面波の場合に，$\boldsymbol{S}$ の向きが $\boldsymbol{k}$ の向きに一致することを示し，さらに $\boldsymbol{S}$ の大きさを問(6)のエネルギー密度 u を用いて表せ。必要ならば，次のベクトル積の公式を用いてよい。

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

２０２２年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第３問

次の式は，エネルギー E を持つ質量 m の粒子が一次元運動する場合に従うシュレディンガー方程式

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right\}\varphi(x)=E\varphi(x)$$

である。ここで $\hbar=\frac{h}{2\pi}$ であり，h はプランク定数である。この粒子が次のポテンシャル

$$V(x)=\begin{cases} +\infty & (x<0) \\ 0 & (0\leq x\leq L) \\ +\infty & (L<x) \end{cases}$$

に束縛されている場合に取りうる状態について，以下の各問いに答えよ。

(1) 自然数 n を用いて，低い方から数えて n 番目のエネルギーを持つ束縛状態の固有エネルギーを E_n，対応する規格化された波動関数を $\varphi_n(x)$とする。E_n と $\varphi_n(x)$ を求めよ。

(2) n が 4 以下の波動関数 $\varphi_n(x)$ を全て図示せよ。

(3) 問 (1) の結果を用いて，$\varphi_n(x)$ における運動量演算子 $\hat{p}$ と位置演算子 $\hat{x}$ から構成される $\hat{p}$，$\hat{p}^2$，$\hat{x}$，$\hat{x}^2$ のそれぞれの期待値，$\langle\hat{p}\rangle_n$，$\langle\hat{p}^2\rangle_n$，$\langle\hat{x}\rangle_n$，$\langle\hat{x}^2\rangle_n$ を求めよ。必要ならば，次の不定積分公式を用いてもよい。

$$\int(x\sin^2x)dx=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$$

$$\int(x^2\sin^2x)dx=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{8}(2x^2-1)\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x+C$$

ただし，C は任意定数である。

(4) 問 (3) の結果を用いて $(\Delta p_n)^2(\Delta x_n)^2$ を計算し，全ての n についての固有状態が，量子力学の不確定性関係 $(\Delta p_n)^2(\Delta x_n)^2\geq\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$ を満たしていることを示せ。ただし，$(\Delta p_n)^2=\langle\hat{p}^2\rangle_n-(\langle\hat{p}\rangle_n)^2$，$(\Delta x_n)^2=\langle\hat{x}^2\rangle_n-(\langle\hat{x}\rangle_n)^2$ である。

(5) 最も低い固有エネルギー E_1 が０より大きい値をとる理由を説明せよ。

２０２２年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第４問

2 次元空間を自由に運動する多電子系を考える。電子は一辺が L の正方形内に閉じ込められており，電子間の相互作用は無視できるものとする。電子の質量を m，電子の総数を N とする。ボルツマン定数を k_B として，以下の各問いに答えよ。

(1) 一電子の固有状態は波数ベクトル $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y)$ で指定され，そのエネルギー $\epsilon_{\boldsymbol{k}}$ は

$$\epsilon_{\boldsymbol{k}} = \frac{\hbar^2({k_x}^2 + {k_y}^2)}{2m}$$

で与えられる。ここで，$\hbar$ はプランク定数 h から $\hbar = h/2\pi$ で定義される定数である。エネルギーが ϵ と $\epsilon + d\epsilon$ の間（ただし $\epsilon \geq 0$）にある一電子状態の数を $D(\epsilon)d\epsilon$ と表すとき，$D(\epsilon)$を状態密度と呼ぶ。状態密度が

$$D(\epsilon) = D_0$$

となることを示し，定数 D_0 を求めよ。なお，スピン自由度により，波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ で指定される一電子状態は 2 重縮退していることに注意すること。

(2) 温度 T におけるフェルミ分布関数を$f_T(\epsilon)$と表す。$f_T(\epsilon)$ の概形を $T = 0$ と $T \neq 0$ のそれぞれについて図示し，それらの特徴を簡潔に述べよ。

(3) フェルミエネルギー ϵ_F を D_0 と N を用いて表せ。

(4) $T = 0$ における全エネルギー E_0を

$$E_0 = AN\epsilon_F$$

の形にまとめ，係数 A を求めよ。

(5) $T \neq 0$ における全エネルギーを E と表すと，$\Delta E \equiv E - E_0$ は

$$\Delta E = \int_0^\infty \epsilon\ D(\epsilon)[f_T(\epsilon) - f_{T=0}(\epsilon)]\,d\epsilon$$

で与えられる。この積分を実行して ΔE を求め，それを使って定積比熱 C_V が

$$C_V = \frac{\pi^2}{3} D_0 k_B^2 T$$

となることを示せ。ただし，$k_BT \ll \epsilon_F$ を満たす低温を考え，化学ポテンシャルは温度変化しないとしてよい。また，積分公式

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}dx = \frac{\pi^2}{12}$$

を使ってよい。

(6) 古典理想気体の定積比熱は $C_V = Nk_{\mathrm{B}}$ となり温度に依存しない。低温における電子気体の比熱が古典理想気体と異なり温度に比例する理由を，フェルミ分布関数の性質と関連付けて説明せよ。