２０２２年４月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理科学専攻（数学系）

試験問題　<一般入試>

専　門　科　目

数　学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は５枚，下書き用紙は３枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０２２年４月入学
大学院自然科学研究科　博士前期課程　数理物理科学専攻（数学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（数学)】
問題は全部で７問ある。A 系統（[A-1]〜[A-4]）から３題を選択，B 系統（[B-1]〜[B-3]）からは２題を選択して，計５題について解答せよ。ただし，以下の問題文中の $\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$ は，すべての実数からなる集合，すべての複素数からなる集合をそれぞれ表すものとする。

【A 系統】

[A-1] a を実数とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & a+1 \\ a & 1 & 1 \\ -1 & -a & -a \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) A が逆行列をもたないような a の値をすべて求めよ。

(2) (1) で求めた a の値に対して，連立一次方程式

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を解け。

(3) (1) で求めた a の値に対して，A が対角化可能か判定せよ。

[A-2] A を n 次実正方行列とし，A は $A^2 + A + E = O$ を満たすものとする。ここで，E は n 次単位行列を表し，O は n 次零行列を表す。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値は $x^2 + x + 1 = 0$ の解であることを示せ。ただし，固有値は複素数の範囲で考えるものとする。

(2) $n = 2$ とする。A の例を一つ与えよ。

(3) $n = 3$ とする。そのような A は存在しないことを示せ。

[A-3] 実数 $\alpha \in (0,1)$ が与えられているとき，関数 $h_\alpha : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を

$$h_\alpha(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{x^2},\ x > 0$$

で定める。また，級数 $F(\alpha)$ および広義積分 $G(\alpha)$ を

$$F(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} |h_\alpha(n)|, \qquad G(\alpha) = \int_1^{\infty} |h_\alpha(x)| dx$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $F(\alpha)$ が収束することを示し，更に $G(\alpha)$ が存在することも示せ。

(2) $x > 0$ のとき，

$$\frac{|\sin(x)|}{x} \leq 1, \qquad |h'_\alpha(x)| \leq \frac{3\alpha}{x^2}$$

が成り立つことを示せ。

(3) 自然数 n に対して，$n \leq x \leq n+1$ のとき，$|h_\alpha(x) - h_\alpha(n)| \leq \dfrac{3\alpha}{n^2}$ が成り立つことを示せ。

(4) $\displaystyle\sup_{\alpha \in (0,1)} \frac{|F(\alpha) - G(\alpha)|}{\alpha} < \infty$ となることを示せ。

[A-4] 以下の問いに答えよ。

(1) $0 < |w| < 1$ となる複素数 w に対して，次の (a) と (b) の場合について，各領域における Laurent 展開

$$\frac{(1-w^2)z}{(z-w)(1-wz)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

の係数 a_n を w を用いて表せ。

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < |w|\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |w| < |z| < 1/|w|\}$

(2) 実数 θ に対して，$|w| < 1$ におけるベキ級数

$$\frac{1-w^2}{1-2w\cos\theta + w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$$

の係数 b_n を θ を用いて表せ。

【B 系統】

[B-1] $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。更に，K が体のとき，

$$\mathrm{GL}(2, K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in K, ad - bc \neq 0 \right\},$$

$$\mathrm{SL}(2, K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in K, ad - bc = 1 \right\}$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) A, B は $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ では共役であることを示せ。

(2) A, B は $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ では共役でないことを示せ。

(3) A, B は $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ では共役であることを示せ。

[B-2] $a > 0$ を定数とする。3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の円柱面

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = a^2\}$$

に関する以下の問いに答えよ。

(1) C 上の各点における外向き単位法ベクトルに関する主曲率 κ_1 と κ_2 を求めよ。ただし，外向き単位法ベクトルは z 軸に向いていないものとする（以下同様）。

(2) C 上の各点における外向き単位法ベクトルに対する C の平均曲率 H を求めよ。

(3) C 上の各点における C のガウス曲率 K を求めよ。

[B-3] $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$K = \{(x, y, z) \,|\, 2 - e^x \leq 2y \leq 4 - e^x, \quad 1 - y \leq z \leq 3 - y, \quad 2y \leq e^x \leq 4 + 2y\}$$

の体積を求めよ。ただし，必要ならば変換

$$u = e^x + 2y, \quad v = y + z, \quad w = e^x - 2y$$

を用いてもよい。