

2021年10月入学, 2022年4月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理学専攻 (物理学系)

試験問題 <一般入試>

専 門 科 目  
物 理 学

注意事項

- 1 解答はじめの合図があるまでは、注意事項を読むだけで、問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。
- 2 問題冊子は1冊、解答用紙は4枚、下書き用紙は4枚です。
- 3 すべての解答用紙に受験番号を記入してください。
- 4 各問題の解答は、それぞれ指定された解答用紙に記入してください。
- 5 解答用紙のホッチキスは、外さないでください。
- 6 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

2021年10月入学, 2022年4月入学  
 大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理学専攻 (物理学系)  
 試験問題 <一般入試>

【試験科目：専門科目 (物理学)】

第1問

図1に示すように、固定された点Oから伸びた2本の長さ $l$ のひもに質量 $m$ の小球AとBがそれぞれ吊り下げられている。ひもの質量、小球AとBの大きさ、空気抵抗と点Oでの摩擦は無視できるものとする。小球A, Bは同じ鉛直面内のみで運動できるものとし、それぞれの位置を、ひもと鉛直下方向のなす角 $\theta_A, \theta_B$ で表す。小球A, Bの、ひもに垂直な方向の速度を $v_A, v_B$ とする。位置および速度は反時計回りの方向を正にとる。重力加速度は $g$ とする。また、ひもは曲がらずに運動するものとする。

ここで、小球A, Bを図2に示すように、鉛直下方向からそれぞれ位置 $-\theta_0, 2\theta_0$  ( $0 < \theta_0 \ll 1$ )まで引き上げて、時刻 $t=0$ に静かに手を離したところ、小球AとBが何度も衝突を繰り返す様子が観察された。小球AとBが $n$ 回目に衝突する際、衝突直前の小球A, Bの速度をそれぞれ $v_{A,n}, v_{B,n}$ 、衝突直後の速度をそれぞれ $v'_{A,n}, v'_{B,n}$ とし、衝突における反発係数が $e$  ( $0 \leq e \leq 1$ )であるとき、 $n$ 回目の衝突前後の速度の関係式が $v'_{B,n} - v'_{A,n} = -e(v_{B,n} - v_{A,n})$ となることに留意して、以下の問いに答えよ。

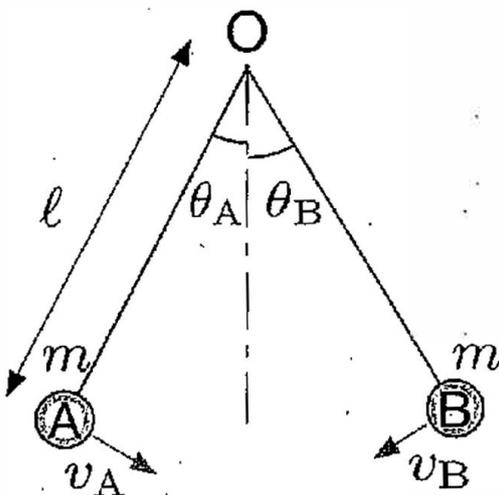


図1

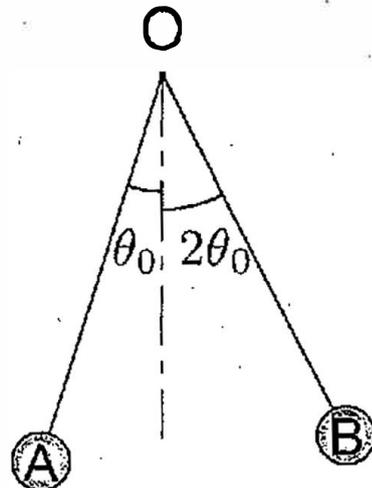


図2

まず、小球 A と B が弾性衝突 (反発係数  $e = 1$ ) をする場合を考える。

- (1) 小球 A が解放されてから 1 回目に衝突するまでの間に、位置  $\theta_A$  ( $-\theta_0 \leq \theta_A \leq 0$ ) にあるとき、小球 A の運動エネルギー  $T$  と位置エネルギー  $U$  を、 $\theta_A$  を用いて表し、ラグランジアン  $L = T - U$  を求めて、小球 A についての運動方程式を導け。ただし、位置エネルギーは最下点  $\theta_A = 0$  を基準とする。
- (2) 小球 A と B が 1 回目に衝突するまでの運動を考える。問(1)で導いた運動方程式より  $\sin \theta_A \cong \theta_A$  の近似を用いて、初期条件を満たす小球 A の位置  $\theta_A$  を時間  $t$  の関数として求めよ。また、1 回目の衝突時刻  $t_1$  を求めよ。
- (3) 小球 A と B が 1 回目に衝突する直前の速度  $v_{A,1}$  と  $v_{B,1}$ 、および衝突直後の速度  $v'_{A,1}$  と  $v'_{B,1}$  を求めよ。
- (4) 小球 A と B が 2 回目に衝突する時刻  $t_2$  を、 $t_1$  を用いて表せ。また、2 回目の衝突直前の速度  $v_{A,2}$  と  $v_{B,2}$  を求めよ。

次に、小球 A と B が非弾性衝突 ( $e < 1$ ) をする場合を考える。ただし、完全非弾性衝突 ( $e = 0$ ) ではないとする。

- (5) 衝突の前後で小球 A と B の運動量の和が変化しないことを考慮して、 $n$  回目の衝突直後の速度和  $v'_{A,n} + v'_{B,n}$  を、 $n$ 、 $\theta_0$ 、 $l$ 、 $g$  を用いて表せ。なお、 $n$  の値によって、速度和の向きが変わることに留意せよ。
- (6) 衝突前後の関係式を用いて、 $n$  回目の衝突直後の速度差  $v'_{B,n} - v'_{A,n}$  を、 $n$ 、 $\theta_0$ 、 $l$ 、 $g$ 、 $e$  を用いて表せ。なお、衝突直前の速度差  $v_{B,n} - v_{A,n}$  は常に負の値をとることに留意せよ。
- (7)  $n$  回目の衝突直後の小球 A、B のそれぞれの速度  $v'_{A,n}$ 、 $v'_{B,n}$  を求めよ。また、 $e = 0.5$  の場合について、位置  $\theta_A$  の時間に対する変化をグラフに図示せよ。時刻は  $t = 0$  から  $4t_1$  までとること。
- (8)  $n$  回目の衝突直後の小球 A と B の運動エネルギーの和を求めよ。十分に時間が経過したとき ( $n \rightarrow \infty$ ) の小球 A と B の運動は、完全非弾性衝突 ( $e = 0$ ) の場合と同じになることを示せ。

2021年10月入学, 2022年4月入学  
 大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理学専攻 (物理学系)  
 試験問題 <一般入試>

【試験科目：専門科目 (物理学)】

第2問

次の各問いに答えよ。ただし、真空の誘電率を  $\epsilon_0$  とする。

- (1) 真空中の静電場におけるマクスウェル方程式から、位置  $r$  における電荷密度  $\rho(r)$  によって生ずる電位  $\phi(r)$  が満たすポアソン方程式  $\Delta\phi(r) = -\rho(r)/\epsilon_0$  を導け。
- (2) 導体表面における電場 (電気力線) は導体表面に垂直であることの原因を説明せよ。

図3に示すように、真空中で  $z < 0$  の領域に接地された導体を置き、 $z$  軸上の点 P  $(0, 0, d)$  に点電荷  $q$  ( $q > 0$ ) を置いた。このとき、次の各問いに答えよ。

- (3) 点 P の導体表面に対する対称な位置  $(0, 0, -d)$  に点電荷  $-q$  を置き、導体を取り除いた場合の電位が、導体表面上での境界条件を満たすことを示せ。
- (4) 電場  $E(x, y, z)$  を求めよ。また、導体がある場合の  $xz$  平面内の等電位線と電気力線の様子を図に示せ。
- (5) 導体表面を含む微小領域にガウスの法則を適用して、導体表面上の点  $(x, y, 0)$  に誘導される電荷密度を求めよ。
- (6) 導体表面上に誘導された電荷の総量を求めよ。
- (7) 点 P の点電荷と導体の間に働く力を求めよ。また、その位置から点電荷を  $z$  軸方向の無限遠まで遠ざけるために必要な仕事を求めよ。

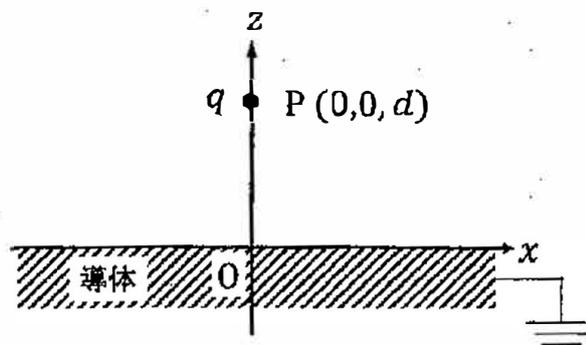


図3



2021年10月入学, 2022年4月入学  
 大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理学専攻 (物理学系)  
 試験問題 <一般入試>

【試験科目：専門科目（物理学）】

第3問

次のハミルトニアンで記述される質量  $m$ , 固有角振動数  $\omega$  の一次元調和振動子を考える。

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2$$

ここで,  $\hat{x}$  は位置演算子,  $\hat{p}$  は運動量演算子である。また, 生成・消滅・数演算子をそれぞれ次のように定義する。

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p} \\ \hat{a} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p} \\ \hat{N} &= \hat{a}^\dagger \hat{a} \end{aligned}$$

ここで,  $\hbar$  は,  $h$  をプランク定数として,  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  である。以下の問いに答えよ。

- (1) 関係式  $\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$  が成り立つことを示せ。
- (2)  $\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right)$  を示せ。
- (3) 演算子  $\hat{N}$  の固有値が  $n (= 0, 1, 2, \dots)$  である正規直交化された固有状態を  $|n\rangle$  と表すとき, 次の関係式を示せ。

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle \\ \hat{a} |n+1\rangle &= \sqrt{n+1} |n\rangle \end{aligned}$$

- (4)  $|n\rangle$  における  $\hat{p}$ ,  $\hat{p}^2$ ,  $\hat{x}$ ,  $\hat{x}^2$  のそれぞれの期待値,  $\langle n|\hat{p}|n\rangle = \langle p \rangle_n$ ,  $\langle n|\hat{p}^2|n\rangle = \langle p^2 \rangle_n$ ,  $\langle n|\hat{x}|n\rangle = \langle x \rangle_n$ ,  $\langle n|\hat{x}^2|n\rangle = \langle x^2 \rangle_n$  を求めよ。
- (5) 問(4)の結果を用いて,  $\langle \Delta p_n^2 \rangle \langle \Delta x_n^2 \rangle$  を計算し, 基底状態  $n=0$  に着目して, その結果の物理的意味を述べよ。ただし,  $\langle \Delta p_n^2 \rangle = \langle n|(\hat{p} - \langle p \rangle_n)^2|n\rangle$ ,  $\langle \Delta x_n^2 \rangle = \langle n|(\hat{x} - \langle x \rangle_n)^2|n\rangle$  である。

次に、以下の式で定義される状態  $|\lambda\rangle$  について考察する。ここで、 $\lambda$  はある複素数である。

$$|\lambda\rangle = e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

以下の問いに答えよ。

- (6) 状態  $|\lambda\rangle$  はコヒーレント状態であること、即ち、 $\hat{a}$  の固有状態であり、 $\hat{a}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$  を満たすこと、更に  $\langle\lambda|\lambda\rangle = 1$  と規格化されていることを示せ。
- (7) 状態  $|\lambda\rangle$  における  $\hat{p}$ ,  $\hat{p}^2$ ,  $\hat{x}$ ,  $\hat{x}^2$  のそれぞれの期待値、 $\langle\lambda|\hat{p}|\lambda\rangle = \langle p\rangle_\lambda$ ,  $\langle\lambda|\hat{p}^2|\lambda\rangle = \langle p^2\rangle_\lambda$ ,  $\langle\lambda|\hat{x}|\lambda\rangle = \langle x\rangle_\lambda$ ,  $\langle\lambda|\hat{x}^2|\lambda\rangle = \langle x^2\rangle_\lambda$  を求めよ。
- (8) 問(7)の結果を用いて、 $\langle\Delta p_\lambda^2\rangle\langle\Delta x_\lambda^2\rangle$  を計算し、得られた結果の物理的意味を述べよ。ただし、 $\langle\Delta p_\lambda^2\rangle = \langle\lambda|(\hat{p} - \langle p\rangle_\lambda)^2|\lambda\rangle$ ,  $\langle\Delta x_\lambda^2\rangle = \langle\lambda|(\hat{x} - \langle x\rangle_\lambda)^2|\lambda\rangle$  である。

2021年10月入学, 2022年4月入学  
 大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理学専攻 (物理学系)  
 試験問題 <一般入試>

【試験科目：専門科目（物理学）】

第4問

立方格子に配置されたスピン  $S = 1/2$  を考える。スピンが持つ磁気モーメントを  $\mu$  と表すと、外部磁場  $H$  により、スピンのエネルギーは  $-\mu H \sigma_i$  だけシフトする。ここで、 $\sigma_i$  は格子点  $i$  におけるスピンが持つ磁気モーメントの向きを表す変数で、 $\sigma_i = +1$  が磁場に平行、 $\sigma_i = -1$  が反平行を表す。この系のハミルトニアン  $\mathcal{H}$  は

$$\mathcal{H} = -\mu H \sum_i \sigma_i$$

で表される。スピンの総数を  $N$ 、ボルツマン定数を  $k_B$  とし、以下の問いに答えよ。

- (1) 温度  $T$  におけるカノニカル分布の分配関数  $Z$  を  $Z = Z_1^N$  と表すとき、1粒子の分配関数  $Z_1$  を求めよ。
- (2) 温度  $T$  における1スピンあたりの磁気モーメントの平均値  $m_0(T, H)$  を求めよ。ただし、磁場と同じ向きを正とする。
- (3)  $m_0(T, H)$  を  $H$  の関数として図示せよ。ただし、 $H$  の正負全領域にわたって図示し、 $H = 0$  における傾きおよび  $H \rightarrow \pm\infty$  における値を図中に記すこと。

次に、外部磁場に加えて、スピン間の相互作用を考える。隣り合う2つのスピンの間には強磁性的な相互作用が働いており、相互作用エネルギーは、2つのスピンが同じ向きの場合には  $-J$ 、異なる向きの場合には  $+J$  をとる ( $J > 0$ )。イジング模型と呼ばれるこの系のハミルトニアン  $\mathcal{H}$  は

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i, j \rangle} \sigma_i \sigma_j - \mu H \sum_i \sigma_i \tag{i}$$

で表される。ここで、添え字  $i$  と  $j$  は格子点を表し、 $\langle i, j \rangle$  は隣り合う格子点の組み合わせに関する和を表す。スピンの総数  $N$  は十分大きく、系の端の影響は無視できるものとする。以下の問いに答えよ。

- (4) 式 (i) の第一項 (相互作用) は、そのままでは厳密に扱うことが難しい。そこで、平均場近似を適用して、 $\sigma_i \sigma_j \approx \sigma_i \bar{\sigma} + \bar{\sigma} \sigma_j - \bar{\sigma}^2$  と置き換える。ここで、 $\bar{\sigma}$  は  $\sigma_i$  の平均値を表し、格子点  $i$  に依存しないとした。この近似により、式 (i) のハミルト

ニアン  $\mathcal{H}$  が

$$\mathcal{H}' = -\mu(H + A\bar{\sigma}) \sum \sigma_i + B\bar{\sigma}^2 \quad (\text{ii})$$

の形で表されることを示し、 $\sigma_i$ ,  $\bar{\sigma}$  に依存しない定数  $A$  および  $B$  の表式を求めよ。  
解答では、1 つの格子点に隣接する格子点の数を記号  $z$  で表すこと（立方格子では  $z = 6$ ）。

- (5) 式 (ii) のハミルトニアンを用いて、温度  $T$  における 1 スピンあたりの磁気モーメントの平均値  $m = \mu\bar{\sigma}$  を計算し、 $m$  が満たす方程式を導け。
- (6)  $H = 0$  の場合に、ある温度  $T_c$  以下において、問 (5) の方程式が  $m = 0$  以外の解を持つことを示し、その温度  $T_c$  を求めよ。
- (7) 強磁性体の磁化測定において、図 4 の矢印のように、磁場  $H$  の変化の向きに応じて磁化  $m$  が異なる値をとるヒステリシスループと呼ばれる現象が観測されることがある。この現象が起こる理由を上記のイジング模型と関連付けて議論せよ。

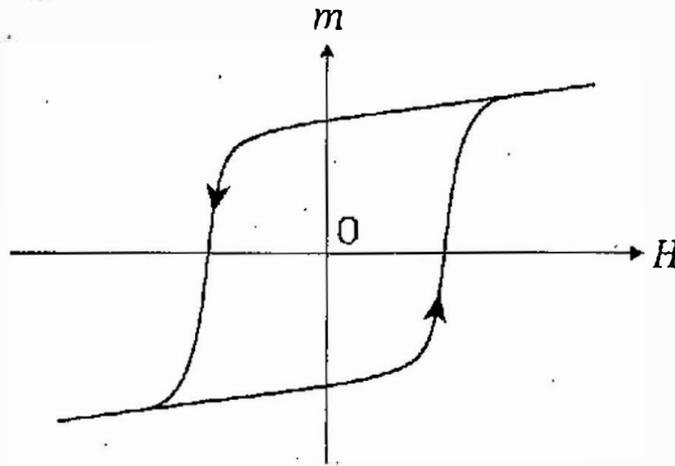


図 4