

岡山大学大学院自然科学研究科  
2022年度博士前期課程入学試験問題  
機械システム工学専攻システム系

数学

注意事項

1. 解答始めの合図があるまで、中の頁を見てはいけない。
2. 問題用紙は5枚ある。
3. 解答用紙は、[1]、[2]、[3]、[4]の4枚および下書き用紙1枚の計5枚ある。
4. 解答始めの合図があったら、中の頁を見て枚数を確認すること。また、すべての解答用紙に、受験番号を記入すること。
5. 解答は、それぞれの問題の解答欄に記入すること。他の問題の解答を記入してはいけない。
6. 解答欄が足りないときは、同じ問題の解答用紙の裏に記入してもよいが、その場合、裏に記入していることを表の頁に書いておくこと。

令和3年8月19日

岡山大学大学院自然科学研究科  
機械システム工学専攻システム系

## 数 学

[1] 問い(1)~(2)に答えよ。

(1) つぎの定積分を求めよ。

①  $\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x + 1} dx$

②  $\int_0^{\frac{2}{\pi}} \left( 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) dx$

(2) 平面上に直線  $\ell$  および点  $A, B, L, R$  が図 1 のように存在する。ただし、 $AL = a, BR = b, LR = c$  であり、 $AL \perp \ell, BR \perp \ell$  とする。このとき、点  $A$  から点  $B$  へ最短の時間で到達する経路を考える。ただし、点  $A$  から直線  $\ell$  までは、一定速度  $v$  で直進し、直線  $\ell$  に到達後は、一定速度  $u$  で直進するものとする。図 1 では、この中継点を  $M$  と表示している。 $\angle AML = \alpha, \angle BMR = \beta$  として、題意の最短の時間で到達する経路における  $\alpha, \beta, v, u$  の関係を求めよ。

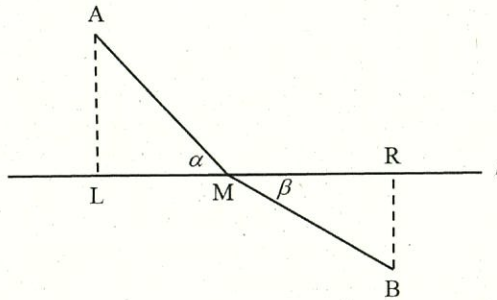


図 1

## 数学

[2]  $R^3$  における次の2つのベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  について考える。

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 2k \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ただし } k \text{ は実数とする。以下の問いに答えよ。}$$

(1)  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  が直交するときの  $k$  を求めよ。

(2)  $k$  が定数のとき、 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  が一次独立かどうかを判断し、理由を述べよ。

(3)  $k = 1$  のとき  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  が張る線形部分空間を  $W$  とする。ベクトル  $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \in W$  かどうかを調べ、  
判定の理由を述べよ。

## 数 学

[3] 微分方程式を用いて、放射性物質の経年変化について考える。ただし崩壊定数の単位は  $[1/s]$  とする。以下の問い (1)~(5) に答えよ。

- (1) 放射性物質の原子核は、時間の経過に伴い、他の安定な原子核に変化する。これを崩壊とよび、崩壊に伴って放射線が放出される。放射性物質の量が単位時間に減少する割合は、その物質の現在量に比例する。この比例係数のことを崩壊定数とよび、これを記号  $\lambda$  ( $> 0$ ) で表すことにする。時刻  $t$  における物質の量を  $x(t)$  として、 $x(t)$  の振る舞いを記述する微分方程式を立てよ。
- (2) 上の微分方程式の解を求めよ。
- (3) 放射性物質が崩壊して、初期の半分の量になるまでの時間を半減期という。これを記号  $T$  で表すことにする。 $\lambda$  と  $T$  の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (4) 以下では  $\log 2 \approx 0.693$ 、1 年は 365 日とせよ。最終的な答は有効数字 2 桁で答えよ。トリチウムの場合、半減期は約 12 年である。トリチウムの崩壊定数  $\lambda$  を求めよ。ただし崩壊定数の単位は  $[1/s]$  であることに留意せよ。
- (5) 削除

## 数 学

[4] 問い(1)～(2)に答えよ。

(1)  $f(t) = e^t \sin 2t + \cos 3t + t \cos t$ のラプラス変換を求めよ。

(2)  $f(t) = e^{-k|t|}$ のフーリエ変換は $F(\omega) = 8/(1 + 16\omega^2)$ となる。 $k$ を正の定数として、 $k$ の値を求めよ。また、 $f(t - 10)$ と $f(t/3)$ のフーリエ変換を求めよ。ただし、 $F(\omega)$ は次式で求められるものとする。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$