

岡山大学大学院自然科学研究科
2022年度博士前期課程入学試験問題
機械システム工学専攻システム系

数学

注意事項

1. 解答始めの合図があるまで、中の頁を見てはいけない。
2. 問題用紙は5枚ある。
3. 解答用紙は、[1]、[2]、[3]、[4]の4枚および下書き用紙1枚の計5枚ある。
4. 解答始めの合図があったら、中の頁を見て枚数を確認すること。また、すべての解答用紙に、受験番号を記入すること。
5. 解答は、それぞれの問題の解答欄に記入すること。他の問題の解答を記入してはいけない。
6. 解答欄が足りないときは、同じ問題の解答用紙の裏に記入してもよいが、その場合、裏に記入していることを表の頁に書いておくこと。

令和3年8月19日

岡山大学大学院自然科学研究科
機械システム工学専攻システム系

数 学

[1] 問い(1)~(2)に答えよ。

(1) つぎの定積分を求めよ。

① $\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x + 1} dx$

② $\int_0^{\frac{2}{\pi}} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) dx$

(2) 平面上に直線 ℓ および点 A, B, L, R が図 1 のように存在する。ただし、 $AL = a, BR = b, LR = c$ であり、 $AL \perp \ell, BR \perp \ell$ とする。このとき、点 A から点 B へ最短の時間で到達する経路を考える。ただし、点 A から直線 ℓ までは、一定速度 v で直進し、直線 ℓ に到達後は、一定速度 u で直進するものとする。図 1 では、この中継点を M と表示している。 $\angle AML = \alpha, \angle BMR = \beta$ として、題意の最短の時間で到達する経路における α, β, v, u の関係を求めよ。

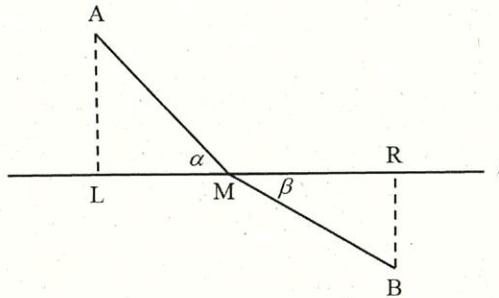


図 1

数学

[2] R^3 における次の2つのベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} について考える。

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 2k \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ただし } k \text{ は実数とする。以下の問いに答えよ。}$$

(1) \mathbf{a} 、 \mathbf{b} が直交するときの k を求めよ。

(2) k が定数のとき、 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} が一次独立かどうかを判断し、理由を述べよ。

(3) $k = 1$ のとき \mathbf{a} 、 \mathbf{b} が張る線形部分空間を W とする。ベクトル $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \in W$ かどうかを調べ、判定の理由を述べよ。

数 学

[3] 微分方程式を用いて、放射性物質の経年変化について考える。ただし崩壊定数の単位は $[1/s]$ とする。以下の問い (1)~(5) に答えよ。

- (1) 放射性物質の原子核は、時間の経過に伴い、他の安定な原子核に変化する。これを崩壊とよび、崩壊に伴って放射線が放出される。放射性物質の量が単位時間に減少する割合は、その物質の現在量に比例する。この比例係数のことを崩壊定数とよび、これを記号 λ (> 0) で表すことにする。時刻 t における物質の量を $x(t)$ として、 $x(t)$ の振る舞いを記述する微分方程式を立てよ。
- (2) 上の微分方程式の解を求めよ。
- (3) 放射性物質が崩壊して、初期の半分の量になるまでの時間を半減期という。これを記号 T で表すことにする。 λ と T の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (4) 以下では $\log 2 \approx 0.693$ 、1 年は 365 日とせよ。最終的な答は有効数字 2 桁で答えよ。トリチウムの場合、半減期は約 12 年である。トリチウムの崩壊定数 λ を求めよ。ただし崩壊定数の単位は $[1/s]$ であることに留意せよ。
- (5) 削除

数 学

[4] 問い(1)～(2)に答えよ。

(1) $f(t) = e^t \sin 2t + \cos 3t + t \cos t$ のラプラス変換を求めよ。

(2) $f(t) = e^{-k|t|}$ のフーリエ変換は $F(\omega) = 8/(1 + 16\omega^2)$ となる。 k を正の定数として、 k の値を求めよ。また、 $f(t - 10)$ と $f(t/3)$ のフーリエ変換を求めよ。ただし、 $F(\omega)$ は次式で求められるものとする。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$