２０２１年１０月入学，２０２２年４月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理科学専攻（数学系）

試験問題　＜一般入試＞

専 門 科 目

数 学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は５枚，下書き用紙は３枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０２１年１０月入学，２０２２年４月入学
大学院自然科学研究科　博士前期課程　数理物理科学専攻（数学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（数学）】

問題は全部で７問ある。A 系統（[A-1]～[A-4]）から３題を選択，B 系統（[B-1]～[B-3]）からは２題を選択して，計５題について解答せよ。ただし，以下の問題文中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ は，すべての整数からなる集合，すべての有理数からなる集合，すべての実数からなる集合，すべての複素数からなる集合をそれぞれ表すものとする。

【A 系統】

[A-1] a を実数とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 2-a & a-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(2) 行列 A が対角化可能でないような a を求めよ。

[A-2] V を n 次元線形空間，W を m 次元線形空間とし，

$$f : V \to W$$

を線形写像かつ単射であるとする。以下の問いに答えよ。

(1) $v_1, \ldots, v_n$ を V の基底とするとき，$f(v_1), \ldots, f(v_n)$ は f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の基底であることを示せ。

(2) 線形写像 $g : W \to V$ が存在して $g \circ f = \mathrm{Id}_V$ となること示せ。ここで，Id_V は V 上の恒等変換である。

(3) 線形写像 $g : W \to V$ が $g \circ f = \mathrm{Id}_V$ を満たすとする。W 上の線形変換 h を $h = f \circ g$ で定めるとき，$h \circ h = h$ および $W = \mathrm{Im}\, h \oplus \mathrm{Ker}\, h$ を示せ。ここで，$\mathrm{Ker}\, h$ は h の核である。

[A-3] n を 0 以上の整数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 次の不等式を示せ。

$$e^x > \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad (x > 0)$$

(2) $s > -1$ のとき，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^s}{e^x}dx$ が収束することを示せ。

(3) 次の広義積分が収束する実数 s の値の範囲を求めよ。

$$\int_0^\infty \frac{x^s}{e^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}dx$$

[A-4] 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有理関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 1}$$

で定める。また，$R > 1$ に対し，線分 $L_R = [-R, R]$ と半円 $C_R = \{Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$ からなる $\mathbb{C}$ 上の閉曲線 $L_R \cup C_R$ を正の向きに一周する経路を Γ_R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $f(z)$ の $\mathbb{C}$ での特異点と留数を求めよ。

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)dz$ を求めよ。

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1}dx$ を求めよ。

【B 系統】

[B-1] Rを単位元を持つ可換環とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) R のイデアル J_1, J_2 はどちらも R のイデアル I を含まないとする。このとき，I の元で J_1 にも J_2 にも属さないものが存在することを示せ。

(2) P を R の素イデアル，$J_1, J_2, \ldots, J_k$ を R のイデアルとする。$J_1 J_2 \cdots J_k \subseteq P$ であれば，$J_i \subseteq P$ となる i が存在することを示せ。

(3) I を R のイデアル，$P_1, P_2, \ldots, P_k$ を R の素イデアルとし，I は $P_1, P_2, \ldots, P_k$ のいずれにも含まれないとする。このとき，I の元で $P_1, P_2, \ldots, P_k$ のいずれにも属さないものが存在することを示せ。

[B-2] 以下の問いに答えよ。

(1) X, Y を位相空間とし，$f : X \to Y$ を連続写像とする。X がコンパクトならば，$f(X)$ は Y のコンパクト集合であることを示せ。

(2) n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A に対し，関数 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$g(\mathrm{x}) = d(\mathrm{x}, A)$$

と定義する。このとき，g は $\mathbb{R}^n$ で連続であることを示せ。ここで，

$$d(\mathrm{x}, A) = \inf\{\|\mathrm{x} - \mathrm{a}\| \mid \mathrm{a} \in A\}$$

である。

(3) (2) において，

$$A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq 1,\ x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0\}$$

とし，更に $\mathbb{R}^n$ の部分集合 B を

$$B = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leq g(\mathrm{x}) \leq 2\}$$

とおく。

(i) B は $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合であることを示せ。

(ii) B から $\mathbb{R}$ への連続な全射が存在するならば具体例を挙げ，存在しないならばそれを示せ。

[B-3] 与えられた $a > 0$ に対し，

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}$$

とおく。このとき，

$$\iiint_V xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

を求めよ。