２０２１年４月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理科学専攻（物理学系）

試験問題　＜一般入試＞

専　門　科　目

物　理　学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は４枚，下書き用紙は４枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０２１年４月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）

試験問題 ＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第１問

図1のように，ばねの一端を壁面に固定し，別の端に質量 m の質点をとりつける。このとき質点は１次元直線（水平でなめらかな底面）上で運動するとする。ばねには，自然長からの伸び（又は縮み）を x，ばね定数を $k(k>0)$ として復元力 $F=-kx$ がはたらく。ばねの質量は無視できるものとする。いま，質点をつり合いの位置から x_0（$x_0>0$）だけ伸ばして静かに手を放す。

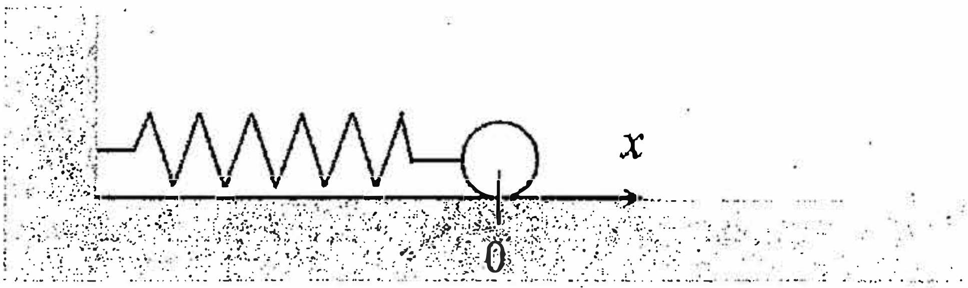

図1

(1) 質点にばねによる復元力のみがはたらくとき，質点のラグランジュ方程式を解いて一般解を求めよ。また，初期条件を満たす解を求めよ。

質点に，ばねによる復元力に加えその速度 v に比例して $-\gamma v\ (\gamma>0)$ の力もはたらくとする。ただし，$\gamma \neq 2\sqrt{mk}$ とする。質点をつりあいの位置から x_0 だけ伸ばして静かに手を放す。

(2) このときの質点の運動方程式を示せ。

(3) 質点の運動方程式の一般解を求めよ。また，初期条件を満たす解を求めよ。

(4) 問(3)で求めた質点の位置 x の時間依存性の概形を図示せよ。

２０２１年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　<一般入試>

【試験科目：専門科目（物理学）】

第２問

以下の文章中のア～サに入る式を導出せよ。ただし，途中の導出過程も解答用紙に記述せよ。

質量 m, 電荷 q をもつ電子が, 時刻 t に印加される電場 $E(t)$ により力を受けて加速運動をする。一方，電子が速さ $v(t)$ で運動するとき，運動方向と反対方向に抵抗力 $kv(t)$ を受けるものとする。このときの電子の運動方程式は（　ア　）と表される。印加される電場が $E(t)=E_0\,e^{i\omega t}$（ E_0 は実数）であるとき，電子の速さは $v(t)=v_0\,e^{i\omega t}$ と表されるものとする。ここで，ω ($\neq 0$) は角周波数である。このとき，q, E_0, k, m, ω を用いて，$v_0=$（　イ　）と与えられる。

電子は断面積 S, 長さ ℓ を持つ棒状の導体 X に，単位体積当たり n 個存在するとする。このとき導体の長さ方向に流れる電流 $I(t)$ は，S, q, n, $v(t)$ を用いると，$I(t)=$（　ウ　）と表される。一方，導体 X の長さ方向に電位差 $V(t)$ を与えると，$E(t)$ は $V(t)$ と ℓ を用いて，$E(t)=$（　エ　）と表される。以上のイ，ウ，エの式から，$V(t)=ZI(t)$ の関係が得られる。ここで，$Z=R+i\omega L$（ R と L はともに実数）であり，k, m, n, q, S, ℓ を用いると，$R=$（　オ　），$L=$（　カ　）と与えられる。

ここで導体 X は $k=0$ と見なすことができるとする。導体 X の内部にある電子の総数は（　キ　）と与えられる。電子の速さの2乗を $|v_0|^2$ とすると，イの式から $|v_0|^2=$（　ク　）となる。従って，導体 X 内にある全電子の総運動エネルギー K は $K=$（　ケ　）と与えられる。一方，$I(t)=I_0\,e^{i\omega t}$ とすると，$|I_0|^2$ は，m, n, q, ω, S, E_0 を用いると，$|I_0|^2=$（　コ　）と与えられる。従って，K は L と $|I_0|^2$ を用いると，$K=$（　サ　）と与えられる。

２０２１年4月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題 〈一般入試〉

【試験科目：専門科目（物理学）】

第3問

変分法はハミルトニアン H の固有値，固有関数を近似的に求める方法の一つである。調節可能なパラメータ α_j $(j=1,2,\cdots)$ を持つ規格化された試行関数 $\Psi(x,\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$ による H の期待値 E を

$$E(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^* H\Psi dx$$

により計算し，$E(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$ がパラメータ α_j $(j=1,2,\cdots)$ の変化に対して最小値を取るように α_j を決める。

(1) 一般に，$E(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$ は H の基底状態のエネルギー E_0 より低くなることはないことを，Ψ が H の固有関数系 $\phi_i(x)$ $(i=0,1,2,\cdots)$ により展開できることを利用して証明せよ。

(2) 以下では１次元調和振動子のハミルトニアン $H_0=\dfrac{-\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2}+\dfrac{m\omega^2}{2}x^2$ について考える。ただし，$\hbar$, m, ω は定数である。規格化された試行関数を $\Psi_1(x,\alpha)=\left(\dfrac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4}e^{-\alpha x^2}$ とするとき，H_0 の期待値が最小になるのは $\alpha=\dfrac{m\omega}{2\hbar}$ であることを変分法により示せ。また，そのときの H_0 の期待値を答えよ。
必要があれば，公式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-cx^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{c}}$ を用いても良い。ただし $c>0$ とする。

(3) 問 (2) で求めた波動関数 Ψ_1 が H_0 の固有関数になっているかどうか調べよ。

(4) ハミルトニアンが $H=H_0+H_1$, $H_1=\beta x^4$ であるときを考える。β は定数である。試行関数 $\Psi_2(x,\alpha)=\left(\dfrac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4}e^{-\alpha x^2}$ を用いて，H の期待値が最小になるように α を決めるための式を具体的に導け。その式を定数 β が小さいという仮定の下で近似的に解き，H の期待値を β の１次の範囲内で求めよ。

(5) 問 (2) で求めた波動関数 Ψ_1 を用いて H_1 に関する１次摂動エネルギーを計算せよ。その結果は，問 (4) の結果の β に関する１次項と一致することを示せ。

(6) 規格化された試行関数として $\Psi_3(x,\alpha)=\sqrt{\dfrac{2\alpha^3}{\pi}}\dfrac{1}{x^2+\alpha^2}$ を用いて H_0 の期待値を変分計算し，α を決めよ。このとき，エネルギーを問 (2) で得た H_0 の期待値と比較せよ。
必要があれば，複素関数 $f(z)$ に関するコーシーの積分表示：

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

を用いても良い。ここで点 z_0 は単一閉曲線 C 内にあり，$f(z)$ は C 内で正則であるとする。

２０２１年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第４問

多数の電子からなる系の振る舞いを理解するため，スピン 1/2 の理想フェルミ気体のモデルを考える。以下の問いに答えよ。ただし，絶対温度を T，ボルツマン定数を k_{B} とする。また，電子の質量を m，プランク定数を h として $\hbar = h/2\pi$ とする。

(1) 温度 $T=0$ におけるフェルミ分布関数 $f(\varepsilon)$ の概形を，エネルギー ε の関数として描け。ただし，フェルミエネルギーを ε_{F} とする。また，同じ図の中に $k_{\mathrm{B}}T \ll \varepsilon_{\mathrm{F}}$ を満たす有限温度での $f(\varepsilon)$ の振る舞いも描け。

(2) この系の１粒子エネルギー ε は，電子の波数の大きさを k として

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

で与えられる。系の体積を V とするとき，状態密度を

$$D(\varepsilon) = A(V)\sqrt{\varepsilon}$$

の形にまとめ，V に依存する係数 $A(V)$ の表式を書き下せ。

(3) $T=0$ において，この系の全粒子数 N を $\varepsilon_{\mathrm{F}}, V$ などを用いて表せ。

(4) $T=0$ における系の全エネルギー E_0 を

$$E_0 = B(N)V^{\alpha}$$

の形にまとめ，N に依存する係数 $B(N)$ と指数 α を求めよ。この際，問 (3) で求めた ε_{F} と N, V の関係によって ε_{F} を消去するのを忘れないこと。

(5) $T=0$ において成り立つ関係式 $P = -\left(\frac{\partial E_0}{\partial V}\right)_N$ により圧力 P を計算し，$T=0$ における状態方程式を

$$PV = CE_0$$

の形にまとめよ。そして，係数 C を求めよ。

(6) 古典理想気体の状態方程式 $PV = Nk_{\mathrm{B}}T$ に従えば，有限の体積 V に閉じ込められたときの圧力は，$T=0$ で $P=0$ となる。しかし，問 (5) の結果はそうなっていない。これはなぜかを論ぜよ。