２０２１年４月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理科学専攻（数学系）

試験問題 ＜一般入試＞

# 専 門 科 目

# 数 学

## 注意事項

1 解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2 問題冊子は１冊，解答用紙は５枚，下書き用紙は３枚です。

3 すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4 各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

5 解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

2021年4月入学
大学院自然科学研究科　博士前期課程　数理物理科学専攻（数学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（数学）】

問題は全部で8問ある。A系統（[A-1]〜[A-4]）から3題を選択, B系統（[B-1]〜[B-4]）からは2題を選択して, 計5題について解答せよ。ただし, 以下の問題文中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ は, すべての整数からなる集合, すべての有理数からなる集合, すべての実数からなる集合, すべての複素数からなる集合をそれぞれ表すものとする。

## 【A系統】

**[A-1]** 次の行列 $A_i$ $(i=1,2)$ は対角化できるか否かを述べよ。各 $i$ について対角化できる $A_i$ に対しては $P^{-1}A_iP$ が対角行列となるような $P$ を一つ求めよ。対角化できない $A_i$ に対してはそれが対角化できない理由を書け。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**[A-2]** $V$ が複素数体 $\mathbb{C}$ 上の $n$ 次元ベクトル空間であるとき，線形写像 $f: V \to V$ に対して，次の条件は同値であることを示せ。

(1) $f$ の固有値はすべて $0$ である。

(2) $V$ のある基底が存在して $f$ の表現行列は，対角成分が $0$ の上三角行列になる。

(3) $f^n = O$.

(4) ある正の整数 $k$ が存在して $f^k = O$ となる。

ただし $O: V \to V$ は零写像とする。

[A-3] 以下の問いに答えよ。

(1) 正の整数 $n$ に対して積分 $\int_0^\pi \cos^2 nx\, dx$ を求めよ。

(2) 正の整数 $n, m$ に対して $\int_0^\pi \cos nx \cos mx\, dx = 0$ を示せ。ただし，$n \neq m$ とする。

(3) 実数列 $\{a_n\}$ が与えられたとする。級数 $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ が収束するとき，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

は，$\mathbb{R}$ 上一様収束し，和を $f(x)$ とするとき，

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx\, dx$$

が成り立つことを示せ。

[A-4] 複素平面 $\mathbb{C}$ 内で $a \in \mathbb{C}$ を中心として半径を $r > 0$ とする開円板を $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ とおき，$U = D(0, 1)$ を単位円板とする。$f$ は $U$ 上定数でない正則関数であって，$U$ の閉包 $\overline{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ で連続であるとする。$U$ の境界を $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) 正則関数 $f$ の絶対値 $|f|$ について，最大値の原理を述べよ。

(2) ある $a \in U$ において $|f(a)| < \min\{|f(z)| \mid z \in C\}$ となるとき，(1) の最大値の原理を用いて $f(z_0) = 0$ となる $z_0 \in U$ が存在することを示せ。

(3) 任意の $z \in C$ に対して $f(z) \neq f(0)$ であると仮定する。

$$c = \frac{1}{2} \min\{|f(z) - f(0)| \mid z \in C\} > 0$$

とおく。任意の $w \in D(f(0), c)$ に対して正則関数 $f(z) - w$ に (2) を適用することにより，$D(f(0), c) \subset f(U)$ となることを示せ。

## 【B 系統】

[B-1] 2次の実正則行列全体からなる群を $GL_2(\mathbb{R})$ と記す。以下の各問いに答えよ。

(1) $GL_2(\mathbb{R})$ の位数4の部分群で巡回群であるものを一つ挙げよ。

(2) $GL_2(\mathbb{R})$ の位数4の部分群で巡回群でないものを一つ挙げよ。

(3) $GL_2(\mathbb{R})$ の位数6の部分群で非可換群であるものを一つ挙げよ。

ただし，各問いにおいて，挙げたものが指示された条件を満たしていることも示せ。

[B-2] $S$ を3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の正則曲面とし，$x : D \to U$ を $S$ のある局所座標系（正則表示）とする，すなわち $x$ は2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ 内の領域 $D$ から $S$ の開集合 $U$ への微分同相写像である。更に，各点 $x(u_1, u_2) \in U$ $((u_1, u_2) \in D)$ において

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_2}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle, \quad \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_2}, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle = 0$$

が満たされていると仮定する。ここで，$\langle \cdot , \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^3$ の内積を表す。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 各点 $x(u_1, u_2) \in U$ $((u_1, u_2) \in D)$ において

$$\left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2}, \frac{\partial x}{\partial u_k} \right\rangle = 0 \qquad (k = 1, 2)$$

が成り立つことを示せ。

(2) $H$ を $U$ における $S$ の平均曲率とし，$N$ を $U$ 上の $S$ の単位法線ベクトル場とする。更に，$U$ 上の $\mathbb{R}^3$ のベクトル場 $A$ を $A = HN$ と定める。このとき，

$$A = \frac{1}{2\mu^2} \left( \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2} \right)$$

を示せ。ここで，$\mu = \sqrt{\langle \partial x / \partial u_1, \partial x / \partial u_1 \rangle} = \sqrt{\langle \partial x / \partial u_2, \partial x / \partial u_2 \rangle}$ である。

(3) $x(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2))$ $((u_1, u_2) \in D)$ とおく。このとき，曲面片 $U$ が極小曲面であるための必要十分条件は各 $x_i$ $(i = 1, 2, 3)$ が $D$ 上の調和関数であることを示せ。

[B-3] $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を連続関数とし，ある実数 $r>0$ に対して，

$$C(r)=\sup_{x\in\mathbb{R}^2}\iint_{B(x,r)}|f(y_1,y_2)|dy_1dy_2<\infty$$

とする。ただし，実数 $R>0$ に対して，$B(x,R)=\{y\in\mathbb{R}^2 \mid |y-x|\le R\}$ と定める。以下の問いに答えよ。

(1) 正の整数 $n$ に対して，$A(n,r)=[-\frac{(2n-1)r}{\sqrt{2}},\frac{(2n-1)r}{\sqrt{2}}]\times[-\frac{(2n-1)r}{\sqrt{2}},\frac{(2n-1)r}{\sqrt{2}}]$ と定める。このとき，任意の正の整数 $n$ に対して

$$\iint_{A(n+1,r)\setminus A(n,r)}\frac{|f(y_1,y_2)|}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{3}{2}}}dy_1dy_2\le 8nC(r)\left(\frac{\sqrt{2}}{(2n-1)r}\right)^3$$

が成り立つことを示せ。ただし，$A,B\subset\mathbb{R}^2$ に対して，$A\setminus B=A\cap B^c$ と定める．

(2) 極限

$$\lim_{R\to\infty}\iint_{B(0,R)\setminus B(0,r)}\frac{|f(y_1,y_2)|}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{3}{2}}}dy_1dy_2$$

が存在することを示せ。

(3) $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ が有界かつ連続であるとき，極限

$$\lim_{r\to\infty}\lim_{R\to\infty}\iint_{B(0,R)\setminus B(0,r)}\frac{|g(y_1,y_2)|}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{3}{2}}}dy_1dy_2$$

を求めよ。

[B-4] 正の数 $c$ と $\mathbb{R}$ 上の $C^2$ 級関数 $f(x)$, $g(x)$ が与えられたとする。波動方程式

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\qquad (x,t)\in\mathbb{R}^2,$$

$$u(x,0)=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x),\qquad x\in\mathbb{R}$$

について以下の問いに答えよ。

(1)

$$u(x,t)=\frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(y)\,\mathrm{d}y$$

が解であることを示せ。

(2) $f(x)=\sin x-2\sin 3x$, $g(x)=\sin x$ のとき $u(x,t)$ を求めよ。