２０２０年１０月入学，２０２１年４月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理科学専攻（物理学系）

試験問題　<一般入試>

専 門 科 目

物 理 学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は４枚，下書き用紙は４枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０２０年１０月入学，２０２１年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　<一般入試>

【試験科目：専門科目（物理学）】

第１問

図１のように xy 平面の原点 O に固定された長さ ℓ の糸の先端に，質量 m の質点が結ばれ xy 面内で x 軸のまわりに振動するような振り子を考える。図１のように鉛直下向きを正とした x 軸と糸がなす角を θ とし，重力加速度の大きさは g であるとする。また，糸の質量と空気抵抗は無視する。

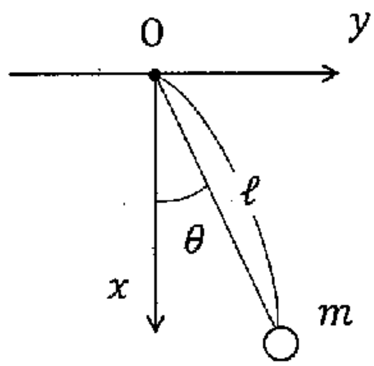

図１

(1) 上記のように xy 面内で振動しているとき，運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U を示し，さらにこの二つを用いて θ に対するラグランジュ運動方程式を示せ。ただし，ポテンシャルエネルギーは $\theta = 0$ のときに 0 とする。

(2) $\theta \ll 1$ の場合に，質点が行う微小振動の角振動数 ω_0 を求めよ。

長さが ℓ で質量が m の一様な棒の上端が xy 平面の原点 O で固定され xy 面内で振動しているとする。図2で示すように x 軸と棒がなす角を θ として，その θ が $\theta \ll 1$ の場合を考える。質点の振動の場合と同じように $\theta = 0$ のときをポテンシャルエネルギーの基準点とし，棒の太さは無視する。また，以下ではすべて回転軸の固定点まわりの慣性モーメントを考える。

(3) 慣性モーメント I を m と ℓ を用いて導け。またこのときに棒が行う微小振動の角振動数 ω_1 を求めよ。

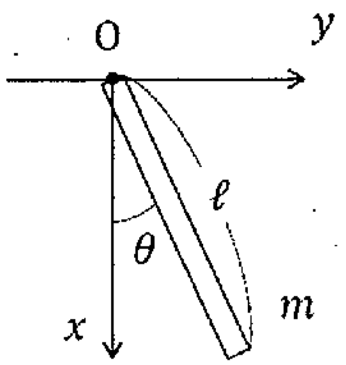

図2

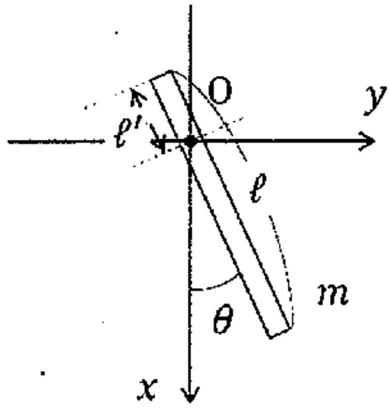

図3

長さが ℓ で質量 m の棒の上端から長さ ℓ' $(0 < \ell' < \ell/2)$ の位置が xy 平面の原点 O に固定され，図3のように xy 面内で振動する振り子を考える。x 軸と棒のなす角を θ とし，その θ が $\theta \ll 1$ の場合を考える。$\theta = 0$ のときをポテンシャルエネルギーの基準点とし，棒の太さは無視する。

(4) 固定点まわりの慣性モーメント I' を m, ℓ, ℓ' を用いて求めよ。

(5) ℓ' を変化させたとき，棒が固定点のまわりで行う微小振動の角振動数が問(3)で求めた ω_1 と同じ角振動数になる ℓ' を求めよ。

２０２０年１０月入学，２０２１年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　<一般入試>

【試験科目：専門科目（物理学）】

第２問

図 4 (a)にあるように，真空中の原点に電荷$+e$の質点 A が固定されている。xy平面上に質量m，電荷$-e$ を持つ質点 B が，質点 A からクーロン力を受けて原点を中心に半径 a で等速円運動をしている。真空の誘電率を ε_0 とする。このとき次の各問いに答えよ。

(1) 質点 B の速さ v を求めよ。

(2) 質点 B が円軌道を 1 周するのに要する時間 T を求めよ。また，質点 B の等速円運動を円周上に流れる電流と見なした場合，その電流の大きさを求めよ。

図 4 (b)にあるように，真空中の xy 平面上に半径 a の円環状の導線が張られ，そこに大きさI の電流が流れている。導線の太さは十分に細く無視できるものとする。真空の透磁率をμ_0とする。

(3) 円環上のある一点 P の位置ベクトルを $\vec{r'} = (x', y', 0)$ とするとき，x' と y' をそれぞれ a と θ' を用いて表せ。ここで θ' はベクトル $\vec{r'}$ と x 軸とのなす角度である。

(4) 点 P での電流密度ベクトルを $\vec{I}(\vec{r'}) = (I_x, I_y, I_z)\delta(r'-a)\delta(z')$ とおくとき，I_x, I_y, I_z を I と θ' を用いて表せ。ここで $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ であり，$\delta(x)$ は変数 x のディラックのデルタ関数である。また，正の z 軸方向から xy 平面を見たとき，電流は反時計回りを正方向とする。

(5) z 軸上の点 Q の位置ベクトルを$\vec{r_0} = (0, 0, b), (b \geq 0)$ とするとき，ベクトルの外積

$$\vec{I}(\vec{r'}) \times \left(\vec{r_0} - \vec{r'}\right)$$

を求めよ。

(6) 円環状電流が点 Q に生成する磁束密度$\vec{B}(\vec{r_0})$は以下のビオ・サバールの式で与えられる。

$$\vec{B}(\vec{r_0}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{\infty} r' dr' \int_0^{2\pi} d\theta' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{\vec{I}(\vec{r'}) \times \left(\vec{r_0} - \vec{r'}\right)}{\left|\vec{r_0} - \vec{r'}\right|^3}$$

問(5)の結果をこの式に代入し，積分を実行することにより $\vec{B}(\vec{r_0})$ を求めよ。

(7) 問(2)の質点Bの等速円運動を円周上に流れる一様な電流と見なせるとき，質点Aの位置に生成される磁束密度の大きさを求めよ。

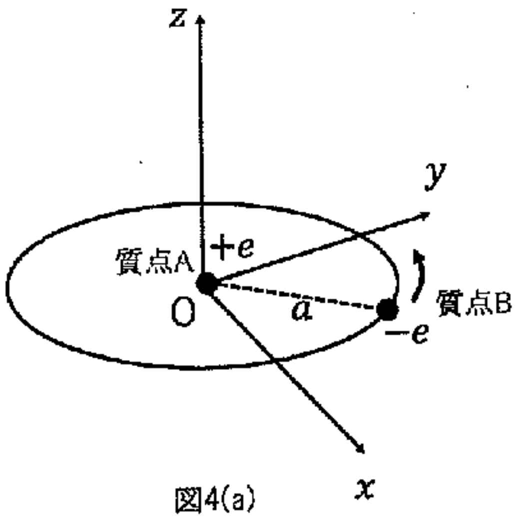

図4(a)

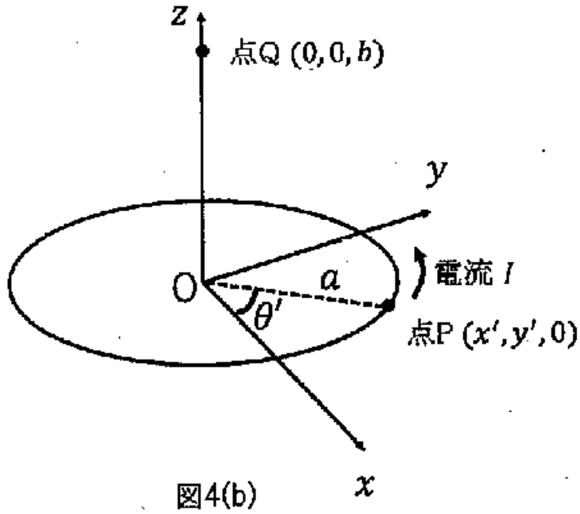

図4(b)

２０２０年１０月入学，２０２１年4月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第３問

二つの可換な角運動量演算子 $\boldsymbol{S}=(S_x,S_y,S_z)$, $\boldsymbol{L}=(L_x,L_y,L_z)$ の和により定義される角運動量演算子 $\boldsymbol{J}=(J_x,J_y,J_z)$ $(=\boldsymbol{S}+\boldsymbol{L})$ について下の問いに答えよ。ただし，S_z の固有関数を $\chi(s,m_S)$，L_z の固有関数を $\phi(\ell,m_L)$，J_z の固有関数を $\psi(j,m_J)$ とし，固有値方程式：

$$S_z\chi(s,m_S)=m_S\hbar\chi(s,m_S),\quad \boldsymbol{S}^2\chi(s,m_S)=s(s+1)\hbar^2\chi(s,m_S),\quad (m_S=-s,-s+1,\cdots,s)$$
$$L_z\phi(\ell,m_L)=m_L\hbar\phi(\ell,m_L),\quad \boldsymbol{L}^2\phi(\ell,m_L)=\ell(\ell+1)\hbar^2\phi(\ell,m_L),\quad (m_L=-\ell,-\ell+1,\cdots,\ell)$$
$$J_z\psi(j,m_J)=m_J\hbar\psi(j,m_J),\quad \boldsymbol{J}^2\psi(j,m_J)=j(j+1)\hbar^2\psi(j,m_J),\quad (m_J=-j,-j+1,\cdots,j)$$

が成り立つとする。ここで $\boldsymbol{J}^2=J_x^2+J_y^2+J_z^2$ と定義する。$\boldsymbol{S}^2$, $\boldsymbol{L}^2$ も同様である。h をプランク定数とするとき，$\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$ である。昇降演算子 $S_\pm=S_x\pm iS_y$, $L_\pm=L_x\pm iL_y$, $J_\pm=J_x\pm iJ_y$ は

$$S_\pm\chi(s,m_S)=\sqrt{s(s+1)-m_S(m_S\pm1)}\hbar\chi(s,m_S\pm1)$$
$$L_\pm\phi(\ell,m_L)=\sqrt{\ell(\ell+1)-m_L(m_L\pm1)}\hbar\phi(\ell,m_L\pm1)$$
$$J_\pm\psi(j,m_J)=\sqrt{j(j+1)-m_J(m_J\pm1)}\hbar\psi(j,m_J\pm1)$$

の関係を満たす。(複合同順)

(1) 交換関係 $[L_x,L_y]=i\hbar L_z$, $[S_x,S_y]=i\hbar S_z$ が成り立つことを利用して，$[J_x,J_y]=i\hbar J_z$ が成り立つことを示せ。ただし，$[A,B]=AB-BA$ である。

(2) 交換関係 $[\boldsymbol{J}^2,J_z]=0$ が成り立つことを示せ。

(3) 固有関数の積 $\chi(s,m_S)\phi(\ell,m_L)$ が J_z の固有関数になっていることを示せ。
このとき $m_J=m_S+m_L$ が成り立つことを示せ。

以下では $s=\dfrac{1}{2}$, $\ell=1$ とし，波動関数を $\chi(m_S)$, $\phi(m_L)$ と略記する。

(4) $\boldsymbol{J}^2=\dfrac{1}{2}(J_+J_-+J_-J_+)+J_z^2$ と書き換えることができる。これを利用して関数 $\chi\left(\dfrac{1}{2}\right)\phi(1)$ が $\boldsymbol{J}^2$ の固有関数になっていることを示せ。そのときの固有値を $j(j+1)\hbar^2$ とおくことにより $j=\dfrac{3}{2}$ となることを示せ。

(5) 下降演算子を $\psi\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)=\chi\left(\dfrac{1}{2}\right)\phi(1)$ へ作用させることにより，$\psi\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ を χ と ϕ を用いた表式として求めよ。

(6) $j = \dfrac{1}{2}$ に属する固有関数 $\psi\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ を χ と ϕ により書き表せ。

(7) ハミルトニアン $H = A\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$ のエネルギー固有値を求めよ。また，各固有状態の縮退度について説明せよ。ただし，A は定数とする。

２０２０年 １０月入学，２０２１年 ４月入学
大学院自然科学研究科　博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第４問

図５のように，格子間隔 a の１次元格子上に定義されたスピン (強磁性ハイゼンベルグモデル) の集団運動を考える。n 番目の格子点に存在するスピン S_n は，隣り合うスピン S_{n-1} および S_{n+1} と相互作用する。スピンは磁気モーメントをもっており，スピン角運動量の時間変化は隣り合うスピンから受けるトルクによって定まるため，S_n の x, y 成分である S_n^x, S_n^y は次のような運動方程式に従う。

$$\frac{d}{dt}S_n^x = -\left(\frac{2JS}{\hbar}\right)\left[S_{n-1}^y - 2S_n^y + S_{n+1}^y\right] \tag{i}$$

$$\frac{d}{dt}S_n^y = +\left(\frac{2JS}{\hbar}\right)\left[S_{n-1}^x - 2S_n^x + S_{n+1}^x\right] \tag{ii}$$

ここで，S はスピン S_n の大きさ，J はスピンの間にはたらく交換相互作用エネルギーの大きさである。また，h をプランク定数として $\hbar = h/2\pi$ とする。

(1) 式 (i), (ii) を解くため，波数 k をもつ進行波型の解 $S_n^x = ue^{ikan-i\omega t}$, $S_n^y = ve^{ikan-i\omega t}$ を代入する。振幅 u, v に関して行列表示すると，式 (i), (ii) は次の形にまとまる。

$$\begin{pmatrix} -i\omega & P \\ Q & -i\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{iii}$$

このとき，非対角項 P, Q を J, S, k, a などを用いて表せ。

(2) 式 (iii) が $u = v = 0$ 以外の解をもつ条件を行列式を用いて表現することで，進行波解のもつ角振動数 ω を波数 k の関数として求めよ (ただし $\omega > 0$ とする)。更に，計算の最後で $ka \ll 1$ の極限をとり，$\omega = Ak^2$ となる係数 A を求めよ。

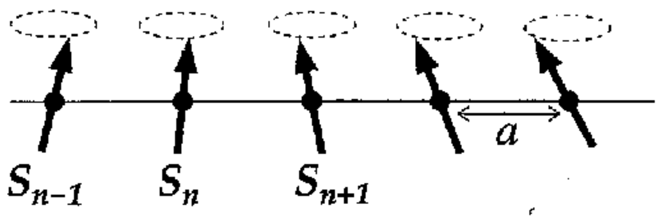

図5

次に，同じ考えを３次元に拡張して，３次元正方格子上のスピンの集団運動を考える。このスピンの集団運動を量子化した素励起はマグノンと呼ばれ，格子振動のフォノンや熱輻射のフォトンと同様に，プランク分布 $1/(e^{\hbar\omega/k_BT}-1)$ に従うボーズ粒子として記述できる。ここで，k_B はボルツマン定数である。

(3) この３次元マグノンの角振動数は，問 (2) で求めた係数 A を用いて

$$\omega = Ak^2 \qquad \left(\text{ここで}\, k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}\right) \tag{iv}$$

となることが知られている。このとき，次式で定義される角振動数空間での状態密度 $D(\omega)$ を導入する。

$$D(\omega)d\omega = \frac{V}{(2\pi)^3}d^3k \qquad (\text{ここで}\, V\, \text{は系の体積})$$

式 (iv) を用いて，この状態密度 $D(\omega)$ を計算せよ。ただし，結果は係数 A を用いて表現して良いとする。

(4) 角振動数 ω をもつマグノンのエネルギーは $\hbar\omega$ で与えられる。マグノンがプランク分布 $1/(e^{\hbar\omega/k_BT}-1)$ に従うボーズ粒子であることに注意して，温度 T で熱平衡にあるマグノンの平均エネルギー $\langle E\rangle$ を求めたい。計算の際，角振動数に関する積分は無次元の変数 $x=\hbar\omega/k_BT$ に変数変換し，角振動数積分の上限は $\omega_{\rm cut}$ とせよ。そして $\langle E\rangle$ を次の形にまとめ，係数 B を求めよ。

$$\langle E\rangle = B\int_0^{\hbar\omega_{\rm cut}/k_BT} dx\, \frac{x^{3/2}}{e^x-1}$$

(5) $\hbar\omega_{\rm cut}/k_BT \gg 1$ の低温極限におけるマグノンの比熱を $C_{\rm mag} \propto T^\gamma$ の形に表し，指数 γ を求めよ。

(6) $\hbar\omega_{\rm cut}/k_BT \ll 1$ の高温極限におけるマグノンの比熱 $C_{\rm mag}$ がどのように温度に依存するのかを記せ。更に，問 (5) の結果と併せて，比熱 $C_{\rm mag}$ の温度依存性の概形を図示せよ。