岡山大学大学院自然科学研究科
2021 年度博士前期課程入学試験問題
機械システム工学専攻システム系

数学

注意事項

1．解答始めの合図があるまで、中の頁を見てはいけない。
2．問題用紙は 5 枚ある。
3．解答用紙は、［1］、［2］、［3］、［4］の 4 枚および下書き用紙 1 枚の計 5 枚ある。
4．解答始めの合図があったら、中の頁を見て枚数を確認すること。また、すべての解答用紙に、受験番号、氏名を記入すること。
5．解答は、それぞれの問題の解答欄に記入すること。他の問題の解答を記入してはいけない。
6．解答欄が足りないときは、同じ問題の解答用紙の裏に記入してもよいが、その場合、裏に記入していることを表の頁に書いておくこと。

令和 2 年 8 月 20 日
岡山大学大学院自然科学研究科
機械システム工学専攻システム系

数　学

[1] 問い(1)～(3)に答えよ。

(1)　つぎの 2 変数関数に対して、1 階微分および 2 階微分を求めよ。

(a) $y = x_1 \sin x_2$　　　　(b) $y = e^{x_1^2 + x_2^2}$

(2)　つぎの 2 変数関数を全微分せよ。

(a) $y = \sin(x_1 x_2)$　　　　(b) $y = e^{-x_1} \sin(kx_2)$

(3)　つぎの定積分を計算せよ。

$$\int_1^e \int_0^y \frac{1}{x^2 + y^2} dxdy$$

数学

[2]　定数行列 $\boldsymbol{A}$、定数ベクトル $\boldsymbol{b}$ と未知ベクトル $\boldsymbol{x}$ の間に $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の関係がある。ただし、

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

である。以下の問いに答えよ。

(1) $\boldsymbol{A}$ の余因子 $D_{i,j}$ を $\boldsymbol{A}$ の要素を用いて表せ。

(2) $D_{i,j}$ を用いて $\boldsymbol{A}^{-1}$ を表せ。ただし $\boldsymbol{A}$ の行列式を $|\boldsymbol{A}|$ とし、$|\boldsymbol{A}|\neq 0$ とする。

(3) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ を $D_{i,j}$、b_i を用いて表した後、$x_i=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b})_i$ を用いて

$$x_i=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(b_1D_{1,i}+b_2D_{2,i}+\cdots+b_nD_{n,i})$$

が成立することを示せ。

(4) (3) の結果を用いてクラメルの公式

$$x_i=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

が成立することを示せ。

数　学

[3]　感染症の流行過程を微分方程式で表現しよう。時刻 t における感受性保持者、感染者、免疫保持者数をそれぞれ $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ とし、感染率を $\beta > 0$、回復率を $\gamma > 0$ とするとき、いわゆる SIR モデルは以下のように与えられる。これについて、問い (1)～(6) に答えよ。

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t)$$

(1)　感受性保持者、感染者、免疫保持者の総和に対して何が成り立つか。理由を付して答えよ。

(2)　初期値 $S(0)$, $I(0)$ はともに正とする。初期時刻 $t = 0$ において、感染者数が増加する条件を求めよ。

初期時刻から流行が発生する場合の典型的な経時変化は下図のようになる。（ただし人数の代わりに比率を用いている。）以下の手順に従って、感染者数のピークについて検討しよう。

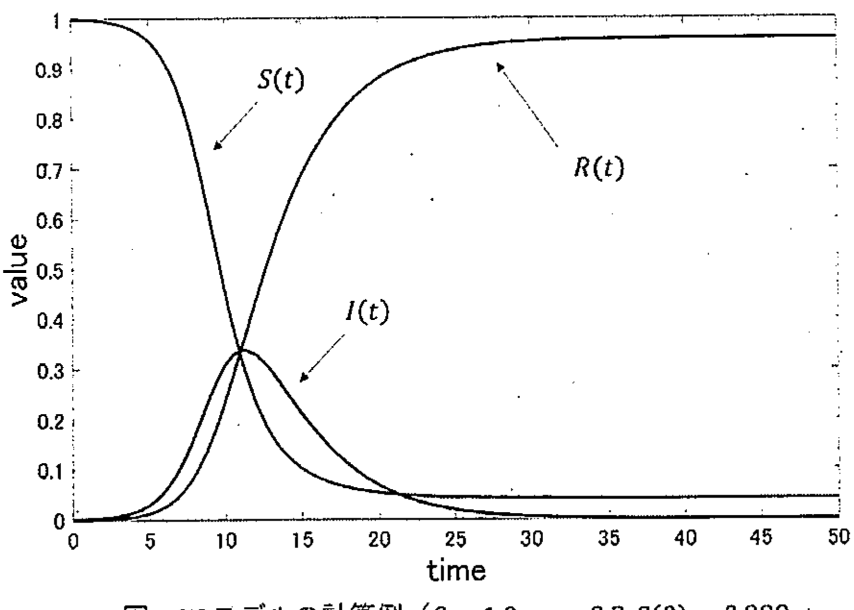

図　SIRモデルの計算例（$\beta = 1.0$, $\gamma = 0.3, S(0) = 0.999$, $I(0) = 0.001$）

(3) 連立微分方程式の第 1 式は変数分離形である。このことから $S(t)$ と $I(t)$ の関係を導け。

(4) (3) の結果と、第 3 式から導かれる結果を用いて $S(t)$ と $R(t)$ の関係を導け。

(5) (3), (4) の結果と (1) の結論を組み合わせて、$I(t)$ を $S(t)$ の関数として表せ。ただし、初期値 $S(0)$, $I(0)$, $R(0)$ は使ってよい。

(6) $I(t)$ を最大化する $S(t)$ の値を求めよ。

数　学

[4] 問い(1)～(2)に答えよ。

(1) (a)と(b)のラプラス逆変換を求めよ。

(a) $L^{-1}\left[\frac{2s}{(s-2)(s+1)(s+2)}\right]$

(b) $L^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^3}\right]$

(2) 問い(a)～(b)に答えよ。

(a) 次の関数$f(x)$のフーリエ変換$X(\omega)$を求めよ。

$$f(x) = \begin{cases} -x\ (-1 \leq x \leq 1) \\ 0\ (x < -1, x > 1) \end{cases}$$

(b) (a)の結果と以下に示すパーセバルの等式を利用して、無限積分Iを求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\}^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sin x - x\cos x)^2}{x^4}\, dx$$