２０２０年１０月入学，２０２１年４月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理科学専攻（数学系）

試験問題　＜一般入試＞

専　門　科　目

数　学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は５枚，下書き用紙は３枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０２０年１０月入学，２０２１年４月入学
大学院自然科学研究科　博士前期課程　数理物理科学専攻（数学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（数学）】

問題は全部で８問ある。A 系統（[A-1]〜[A-4]）から３題を選択，B 系統（[B-1]〜[B-4]）からは２題を選択して，計５題について解答せよ。ただし，以下の問題文中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ は，すべての整数からなる集合，すべての有理数からなる集合，すべての実数からなる集合，すべての複素数からなる集合をそれぞれ表すものとする。

【A 系統】

[A-1] ３次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) A の各固有値に関する固有空間の基底を１組求めよ。

(3) $Q^{-1}AQ$ が対角行列となる直交行列 Q を一つ求めよ。

[A-2] V がベクトル空間で線形写像 $f: V \to V$ が $f \circ f = f$ を満たすとき，次の三つの条件をみたす V の部分空間 W と U が存在することを示せ。

(1) $V = W \oplus U$ (直和) が成立する。

(2) 任意の $v \in W$ に対して $v - f(v) = 0$ が成立する。

(3) 任意の $v \in U$ に対して $f(v) = 0$ が成立する。

[A-3] 関数 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ は $(0,\infty)$ 上で連続で，任意の $x,y>0$ に対して

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

を満たすとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 任意の $x\in(0,\infty)$，正の整数 n,m に対して

$$f(x^{\frac{n}{m}})=\frac{n}{m}f(x)$$

が成り立つことを示せ。

(2) 任意の $x\in(0,\infty)$，$\alpha\in\mathbb{R}$ に対して

$$f(x^{\alpha})=\alpha f(x)$$

が成り立つことを示せ。

(3) f は $(0,\infty)$ 上で微分可能であることを示せ。

(4) このような連続関数 f をすべて求めよ。

[A-4] 正則関数 $f(z)$ に対して，実2変数の実数値関数 $u(x,y)$，$v(x,y)$ を $f(x+\sqrt{-1}y)=u(x,y)+\sqrt{-1}v(x,y)$ で定める。このとき以下の問いに答えよ。

(1) u,v の偏導関数 u_x,u_y,v_x,v_y を用いて Cauchy–Riemann 方程式を述べよ。

(2) $v(x,y)=x^3y-xy^3+y$ かつ $u(0,0)=\dfrac{1}{2}$ をみたす正則関数 $f(z)$ を $z=x+\sqrt{-1}y$ を用いて表せ。

(3) (2) における正則関数 $f(z)$ に対して，$|z|<1$ における $f(z)=0$ の根の (重複度込みの) 個数を求めよ。

【B 系統】

[B-1] 2次正則実行列全体のなす群を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ とする。

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とし，$GL_2(\mathbb{R})$ の部分集合 H および K を

$$H = \{A^i B^j \mid i, j \in \mathbb{Z}\}$$
$$K = \{A^{2i} \mid i \in \mathbb{Z}\}$$

で与える。 ここで A^0 および B^0 は単位行列とする。以下の問いに答えよ。

(1) 群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の元 A および AB の位数をそれぞれ求めよ。

(2) H は $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群であることを示せ。

(3) K は H の正規部分群であることを示し，群としての同型 $H/K \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を示せ。

[B-2] 位相空間 X 上の実数値関数 $f, g : X \to \mathbb{R}$ について, 以下の問いに答えよ。

(1) f が連続ならば, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して, $\{x \in X \mid f(x) = a\}$ は X の閉集合であることを示せ。

(2) f, g が連続ならば, $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ は X の閉集合であることを示せ。

(3) f, g が連続ならば, $\{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$ は X の開集合であることを示せ。

(4) $b < c$ を満たす任意の有理数 b, c に対して, $\{x \in X \mid b < f(x) < c\}$ が X の開集合ならば, f は連続であることを示せ。

[B-3] $0 < R < a$ とする。以下の問いに答えよ。

1. 積分
$$\int_0^{\pi} \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}\,\sin\theta\,d\theta$$
を求めよ。

2. 点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ が集合 $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R\}$ 上を動くとき，点 $(0, 0, a)$ から点 P までの距離の平均値
$$\frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}\,dxdydz$$
を求めよ。

[B-4] $\mathbb{R}^2$ を座標 u_1，u_2 をもつ2次元ユークリッド空間とする。また，$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を領域とし，$f : \Omega \to \mathbb{R}$ を滑らかな（C^∞ な）関数とする。更に，f のグラフを
$$\mathrm{Graph}_f := \{(u_1, u_2, f(u_1, u_2)) \in \mathbb{R}^3 \mid (u_1, u_2) \in \Omega\}$$
とおく。ここで，$\mathbb{R}^3$ は3次元ユークリッド空間を表す。このとき以下の問いに答えよ。

(1) Graph_f が正則曲面であることを示せ。

(2) Graph_f のガウス曲率 K を求めよ。

(3) Graph_f が極小曲面であるとき，f が満たす偏微分方程式を導出せよ。