２０２０年４月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理科学専攻（物理学系）

試験問題　＜一般入試＞

専　門　科　目

物　理　学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は４枚，下書き用紙は４枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０２０年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第１問

図 1 に示すように，長さ ℓ_1 の糸の上端を点 O に固定し，下端に質量 m_1 のおもりをつけ，さらにその下に長さ ℓ_2 の糸と質量 m_2 のおもりをつけて，2 重振り子を作る。この 2 重振り子を 1 つの鉛直面内で小さく振動させる場合を考えよう。θ_1，θ_2 を 2 本の糸と鉛直線のなす角とし，また，重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。なお，糸の質量とおもりの大きさは無視できる。

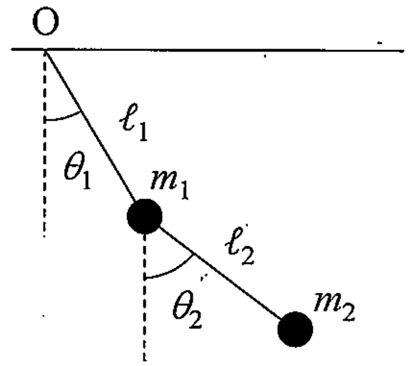

図１

(1) この系の運動エネルギーが

$$\frac{1}{2}m_1\ell_1{}^2\dot{\theta}_1{}^2+\frac{1}{2}m_2(\ell_1\dot{\theta}_1+\ell_2\dot{\theta}_2)^2$$

になることを示せ。

(2) この系のポテンシャルエネルギーを求めよ。ポテンシャルエネルギーの値は $\theta_1=\theta_2=0$ のときをゼロとする。ここでは $\cos\theta=1-\frac{1}{2}\theta^2$の近似を用いよ。

(3) (1)(2)の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーから，ラグランジュの運動方程式が

$$(m_1+m_2)\ell_1\ddot{\theta}_1+m_2\ell_2\ddot{\theta}_2=-(m_1+m_2)g\theta_1$$
$$\ell_1\ddot{\theta}_1+\ell_2\ddot{\theta}_2=-g\theta_2$$

になることを示せ。

以下の問いでは，$m_1 = m_2 = m$,　$\ell_1 = \ell_2 = \ell$ とする。

(4) ${\omega_0}^2 = g/\ell$ とすると，(3)の運動方程式はどのような式になるかを示せ。

(5) 基準振動を

$$\theta_1(t) = A_1\cos(\omega t + \alpha),\quad \theta_2(t) = A_2\cos(\omega t + \alpha),$$

とおくと，固有振動数は

$$\omega_a = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\omega_0,\quad \omega_b = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,\omega_0$$

になることを示せ。

(6) 基準振動における A_1/A_2 の値を，固有振動数が ω_a と ω_b それぞれの場合において求めよ。

(7) 固有振動数が ω_a と ω_b それぞれの場合において，この系の振動の様子を論ぜよ。

２０２０年４月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）

試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第２問

以下の問いでは，導出過程についても記すこと。

(1) $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$をベクトル場とするとき，以下の恒等式を証明せよ。

(a) $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = 0$

(b) $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) - \Delta\,\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$

(2) アンペール・マクスウェルの法則

$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x},t) + \varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}$$

に関する以下の問いに答えよ。$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)$ は磁束密度，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ は電場，$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x},t)$ は電流密度，$\rho(\boldsymbol{x},t)$ は電荷密度，μ_0 は真空の透磁率，ε_0 は真空の誘電率とする。

(a) アンペール・マクスウェルの法則が以下の電荷保存則を満たすことを示せ。

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial \rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = 0$$

(b) $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x},t) = 0$ および $\rho(\boldsymbol{x},t) = 0$ である真空中で，アンペール・マクスウェルの法則とファラデーの誘導法則

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}$$

から，電場および磁場に関する波動方程式

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = 0, \qquad \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = 0$$

を導出せよ。ここで，c は真空中の光の速さであり，$c = 1\Big/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ の関係がある。

(3) 半径 R の導体円板からなる平行平板コンデンサー(静電容量 C)と交流電源($V(t) = V_0\sin\omega t$)とから構成される回路(図 2(a))について，以下の問いに答えよ。ただし，コンデンサー内部は真空に保たれており，導線の抵抗は 0 とする。また，電荷の分布は一様であるとし，極板の端における電場の乱れは無視する。

(a) 時刻 t における極板の電荷 $Q(t)$ を求めよ。

(b) 極板間に発生する電束密度 $D(t)$ を求めよ。

(c) 極板間で，その中心軸から r 離れた地点（図 2(b)）における磁場の強さ $H(r)$ を求めよ。

(d) 極板間の変位電流 $I_d(t)$ が，導線内を流れる電流 $I(t)$ と等しいことを示せ。

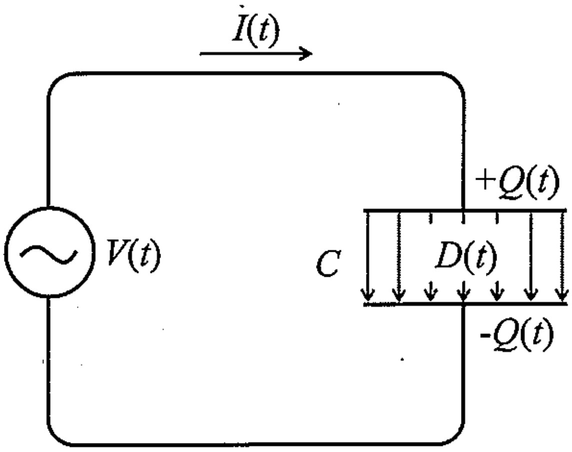

図2(a)

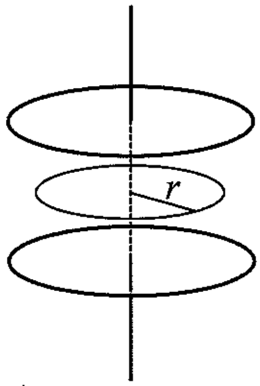

図2(b)

２０２０年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理科学専攻 （物理学系）
試験問題 ＜一般入試＞

【試験科目：専門科目 （物理学） 】

第３問

スピン角運動量演算子の 2×2 行列表示 $s_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $s_+ = s_x + \mathrm{i}s_y = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $s_- = s_x - \mathrm{i}s_y = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を用いて次の問いに答えよ。解答では 計算過程についても記述すること。なお，$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ であり，h はプランク定数である。

(1) 2×2 行列表示での s_x と s_y を求めよ。

(2) 行列表示のスピン角運動量演算子を用いて交換関係

$$[\,s_x, s_y\,] \qquad [\,s_y, s_z\,] \qquad [\,s_z, s_x\,]$$

をそれぞれ計算せよ。答はスピン角運動量演算子を用いて表すこと。

(3) スピン角運動量の固有状態は，上向きスピン状態を $|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 下向きスピン状態を $|\beta\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表すことができる。行列表示のスピン角運動量演算子を作用させ，

$$s_z|\alpha\rangle, \quad s_z|\beta\rangle, \qquad s_+|\alpha\rangle, \quad s_+|\beta\rangle, \qquad s_-|\alpha\rangle, \quad s_-|\beta\rangle.$$

をそれぞれ計算せよ。答は $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ を用いて表すこと。

(4) s_x についての固有値問題 $s_x|\psi\rangle = m|\psi\rangle$ を解いて，２つの固有値 m と，それぞれの固有値に対する固有状態 $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \psi_\beta \end{pmatrix}$ を求めよ。なお，ψ_α は正の実数とし，規格化条件 $|\psi_\alpha|^2 + |\psi_\beta|^2 = 1$ も考慮すること。

(5) ハイゼンベルグ表示の演算子 $F_{\mathrm{H}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathcal{H}t/\hbar}F\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathcal{H}t/\hbar}$ を時間 t について微分することにより，ハイゼンベルグの運動方程式 $\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\mathrm{H}}(t) = [F_{\mathrm{H}}(t), \mathcal{H}]$ を導出せよ。$\mathcal{H}$ はハミルトニアンであり，F は t に依存しないシュレーディンガー表示の演算子である。

(6) 質量が m で電荷の大きさが e の電子に磁場 B を z 方向にかけた場合を考える。ゼーマンエネルギーのハミルトニアン $\mathcal{H} = \frac{g\mu_{\mathrm{B}}}{\hbar}s_z B$ についてのハイゼンベルグの運動方程式から，スピン角運動量演算子 s_x, s_y, s_z のそれぞれに関する運動方程式を導出せよ。なお，$\mu_{\mathrm{B}} = \frac{e\hbar}{2m}$ はボーア磁子，g は電子スピンの g 因子である。

(7) s_x, s_y, s_z がスカラー量であると考えて (6) の運動方程式を解くと，時刻 t でのスピン角運動量が $(s_x, s_y, s_z) = \dfrac{\hbar}{2}\left(\sin\theta\cos(\omega t+\phi), \sin\theta\sin(\omega t+\phi), \cos\theta\right)$ のようになる。この時の ω を求めよ。答は，B, g, m, e を用いて示せ。

(8) (7) のスピン角運動量はどのような運動をしているか 文章と図で説明せよ。また，この運動の名称を答えよ。

２０２０年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第４問

結晶の格子振動による比熱に関する以下の問いに答えよ。

(1) デュロン・プティの法則によると，高温極限での結晶のモル比熱は一定値となる。古典統計力学に基づき，その理由を説明せよ。ただし，気体定数 $R = N_A k_B$ を用いよ。k_B, N_Aはそれぞれボルツマン定数及びアボガドロ定数である。

(2) 結晶の比熱の温度依存性を説明するため，アインシュタイン模型では結晶を同一の振動数 ω_E で振動する N 個の独立な調和振動子の集団と仮定している。

(a) 結晶の内部エネルギー U を求めよ。

(b) 定積比熱を求めよ。ここで，解答には $\Theta_E = \hbar\omega_E/k_B$ を用いよ。

(c) 比熱の低温極限（$\hbar\omega_E/k_BT \gg 1$）及び高温極限（$\hbar\omega_E/k_BT \ll 1$）での温度依存性を求めよ。

(3) デバイ模型では，結晶を連続体のように考え原子の連成振動を音波で近似した。簡単のため縦波と横波の速さを平均値 v_0 で近似すると，角振動数がωと$\omega + d\omega$の間にある基準振動の数 $D(\omega)d\omega$ が，

$$D(\omega)d\omega = \frac{3V}{2\pi^2 v_0^3}\omega^2 d\omega \ \ (\omega < \omega_D), \quad D(\omega)d\omega = 0 \ \ (\omega > \omega_D)$$

で与えられる。ここで $D(\omega)$ は振動子の状態密度，ω_D はデバイ振動数である。

(a) ω_D は基準振動の総数 $\int_0^\infty D(\omega)d\omega = 3N$ より決まる。ω_D を求めよ。ここで，N は原子数である。

(b) 格子振動（フォノン）がボース粒子であることを考慮して内部エネルギーを求めよ。ここで，解答には $x_D = \hbar\omega_D/k_BT$, $\Theta_D = \hbar\omega_D/k_B$ を用いよ。また，解答に積分の形を残して良い。

(c) 低温極限 $x_D \to \infty$ における定積比熱を求めよ。ここで，以下の積分公式を用いてよい。

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx = \frac{\pi^4}{15}$$