２０２０年４月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理科学専攻（数学系）

試験問題　＜一般入試＞

専　門　科　目

数　学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は５枚，下書き用紙は３枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，問題番号と共に１枚の解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０２０年４月入学
大学院自然科学研究科　博士前期課程　数理物理科学専攻（数学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（数学）】

問題は全部で８問ある。A 系統（[A-1]～[A-4]）から３題を選択, B 系統（[B-1]～[B-4]）からは２題を選択して, 計５題について解答せよ。ただし, 以下の問題文中の $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ は, すべての自然数からなる集合, すべての整数からなる集合, すべての有理数からなる集合, すべての実数からなる集合, すべての複素数からなる集合をそれぞれ表すものとする。

【A 系統】

[A-1] 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値をすべて求めよ。

(2) (1) で求めた各固有値に対応する A の固有空間の次元を求めよ。

(3) A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を一組求めよ。

[A-2] V を有限次元ベクトル空間とし, $f : V \longrightarrow V$ を線形変換とする。次の５条件は互いに同値であることを示せ。

(i) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$

(ii) 任意の自然数 n に対して $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^n)$

(iii) 任意の自然数 n に対して $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^n)$

(iv) $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$

(v) $V = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$

[A-3] a を実数とし, 関数 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^{2k}}{(2k)!}$$

で定める。ただし, $0^0 = 1, 0! = 1$ と定める。以下の問いに答えよ。

(1) f, g の収束半径を求めよ。

(2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f^{(2n)}(x) = a^n f(x), \ f^{(2n+1)}(x) = a^n g(x)$$
$$g^{(2n)}(x) = a^n g(x), \ g^{(2n+1)}(x) = a^{n+1} f(x)$$

が成り立つことを示せ。

(3) 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$g(x+y) = g(x)g(y) + af(x)f(y)$$

が成り立つことを示せ。

(4) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $(g(x))^2 - a(f(x))^2 = 1$ が成り立つことを示せ。

[A-4] $t > 0$ に対して, 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有理型関数を $f(z) = \dfrac{e^{itz}}{1+z^2}$ で定める。また, $R > 1, r > 1$ に対して, 4 線分 $C_1 = [-r, r]$, $C_2 = \{r + is \mid 0 \leq s \leq R\}$, $C_3 = \{s + iR \mid -r \leq s \leq r\}$, $C_4 = \{-r + is \mid 0 \leq s \leq R\}$ からなる複素平面 $\mathbb{C}$ 上の閉曲線 $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ を正の向きに一周回る経路を $\Gamma_{r,R}$ とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) $f(z)$ の極と留数を全て求めよ。

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_{\Gamma_{r,R}} f(z)\, dz$ を求めよ。

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\, dx$ を求めよ。

【B 系統】

[B-1] 整数環 $\mathbb{Z}$ の剰余環に関する以下の問いに答えよ。ただし, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ は環 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の単元全体からなる乗法群である。

(1) 乗法群 $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times$ の位数を求めよ。また, これは巡回群であるか, 理由と共に答えよ。

(2) 乗法群 $(\mathbb{Z}/48\mathbb{Z})^\times$ と加法群 $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$ が同型となるような 2 以上の自然数 a, b, c (ただし $a \leq b \leq c$) を求めよ。

(3) 乗法群として $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/48\mathbb{Z})^\times$ となる自然数 n で, 48 と異なるものを一つ求めよ。

[B-2] $\mathbb{R}^3$ を 3 次元ユークリッド空間, $O^{(3)}$ を $\mathbb{R}^3$ の自然な位相（すなわち, $\mathbb{R}^3$ の開集合全体のなす集合族）とする。また, $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$\mathbb{S}^2 = \left\{ (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1 \right\}$$

に $O^{(3)}$ から誘導される相対位相 $O_{\mathbb{S}^2}$ を与える。したがって, 組 $(\mathbb{S}^2, O_{\mathbb{S}^2})$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間となる。さらに, $n = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$ に対して, $U = \mathbb{S}^2 \setminus \{n\}$ とおく。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) U が $(\mathbb{S}^2, O_{\mathbb{S}^2})$ の開集合であることを示せ。

(2) $\mathbb{R}_0^2 = \{(r_1, r_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}$ とおく。各 $x = (x_1, x_2, x_3) \in U$ に対して, n と x を通る $\mathbb{R}^3$ 内の直線と $\mathbb{R}_0^2$ との交点を $p(x)$ とする。$p(x)$ の座標を求めよ。

(3) 写像 $\pi : \mathbb{R}_0^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を $\pi(r_1, r_2, 0) = (r_1, r_2)$ と定義する。ここで, $\mathbb{R}^2$ は 2 次元ユークリッド空間を表す。写像 $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$\varphi(x) = \pi(p(x)), \quad (x \in U)$$

で定める。このとき, φ が同相写像であることを示せ。

[B-3] $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $x-y=s$, $x+y=t$ とおくときヤコービ行列式

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$$

を求めよ。

(2) 積分

$$I = \iint_{\Omega} \frac{(x-y)^2}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

を求めよ。

[B-4] $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする。連続写像 $f: S^1 \to S^1$ の写像度を $\deg f$ で表す。また, 連続写像 $g: S^1 \to \mathbb{C}^\times$ に対して $\widetilde{g}(z) = \dfrac{g(z)}{|g(z)|}$ $(z \in S^1)$ により連続写像 $\widetilde{g}: S^1 \to S^1$ を定め, g の写像度 $\deg g$ を $\deg g = \deg \widetilde{g}$ により定義する。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 連続写像 $f: S^1 \to S^1$ が任意の $z \in S^1$ に対して $f(z)\,z \neq -1$ を満たすとき $\deg f$ を求めよ。

(2) 写像 $g: S^1 \to \mathbb{C}^\times$ が連続写像 $G: D^2 \to \mathbb{C}^\times$ の S^1 への制限であるとき, $\deg g$ の値を求めよ。

(3) z に関する方程式

$$\frac{z^8 - 2z^3 + i\,|z| - 1}{7} = z$$

は D^2 において（少なくともひとつ）解を持つことを証明せよ。